MATEMÁTICAS I

Unidad 8 Vectores en el plano

1 Dados los puntos A (−5, 0), B (4, −3) y C (−2, −5), calcula:

a) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{CA}$

b) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$

c) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA}$

2 Dados los vectores $\vec{u} = (2, 3)$ y $\vec{v} = (-5, 1)$, halla:

a) Su suma.

b) Su diferencia.

c) El origen del vector suma sabiendo que el extremo de la suma es el punto A (−2, 6).

3 Dados los vectores $\vec{u} = (-3, 5)$ y $\vec{w} = (1, -2)$, resuelve la ecuación:

$$3\vec{u} - 2\vec{v} = 4\vec{w}$$

4 Siendo $\vec{u} = (1, 4)$ y $\vec{v} = (3, 4)$, resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2\vec{x} + \vec{y} = \vec{u} \\ 4\vec{x} + \vec{y} = \vec{v} \end{array}\right\}$$

5 Resuelve el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} (x, y) \cdot (3, -2) = 0 \\ (-2, 4) \cdot (x, y) = -8 \end{array}\right\}$$

6 Comprueba si son linealmente independientes los vectores $\vec{u} = (-2, 7)$ y $\vec{v} = (4, 9)$.

7 Si $\vec{v}$ es un vector de coordenadas (2, −4) respecto de la base canónica, halla las coordenadas de $\vec{v}$ respecto de la base B = {(2, −2), (1, 3)}.

8 Dada la base B = {(2, −1), (−4, 3)}, halla las coordenadas de $\vec{u} = (2, -2)$ y $\vec{v} = (24, -17)$ respecto de B.

9 Encuentra un vector unitario de la misma dirección y de sentido opuesto a $\vec{u} = (9, -12)$.

10 *a)* Comprueba si los vectores $\vec{u} = (5, 3)$ y $\vec{v} = (6, -10)$ son perpendiculares.

b) Transforma los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para que formen una base ortonormal.

11 Dados los vectores de coordenadas $\vec{u} = (-1, 4)$ y $\vec{v} = (2, 5)$ respecto de la base B = $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ ortogonal, que cumple $|\vec{x}| = 3$, $|\vec{y}| = 2$, halla el producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

12 Dados $\vec{u} = (2, 10)$ y $\vec{v} = (-3, 1)$ respecto de la base B = $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ que cumple $|\vec{x}| = 3$, $|\vec{y}| = 5$ y $\vec{x} \cdot \vec{y} = -2$, halla el producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

13 Halla el valor de *m* para que los vectores $\vec{u} = (-2, 3)$ y $\vec{v} = (4, m)$ sean:

a) Paralelos.

b) Perpendiculares.

14 Dados los vectores $\vec{u} = (-2, 7)$ y $\vec{v} = (-3, -4)$, calcula el coseno del ángulo que forman.

1 Si consideramos el vector $\vec{a} = x_1\,\vec{u} + x_2\,v$ y el vector $\vec{b} = y_1\,\vec{u} + y_2\,\vec{v}$, siendo $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ una base de V^2, encuentra la expresión del producto escalar de estos vectores en cada uno de los siguientes casos:

a) Siendo B una base ortogonal.

b) Siendo B una base normal.

c) Siendo B una base ortonormal.

2 Siendo $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores de V^2, que cumplen $|\vec{a}| = 1$ y $|\vec{b}| = 3$, ¿es posible que $a \cdot b = 4$?

3 Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son dos vectores de coordenadas (3, 4) y (1, 1) respecto de la base normal $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ y se verifica que $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$, halla el producto escalar de $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

4 Expresa el vector $\vec{w} = (3, 3)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u} = (1, -1)$ y $\vec{v} = (2, 1)$.

5 Si dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son tales que $|\vec{a} + \vec{b}| = 9$ y $|\vec{a} - \vec{b}| = 5$, halla su producto escalar.

6 Dados los vectores $\vec{u} = (-2, 3)$ y $\vec{v} = (m, 4)$, halla el valor de *m* para que:

a) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean paralelos.

b) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean ortogonales.

c) Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ fomen una base de V^2.

7 Siendo $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores de los que sabemos que el módulo de $\vec{u}$ es igual a tres, y que el producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es igual a dos, halla el módulo del vector $\vec{v}$.

Unidad 9 La recta en el plano

1 Encuentra la ecuación vectorial, las paramétricas, la continua y la general de la recta que pasa por los puntos A $(3, -1)$ y B $(2, 5)$.

2 Halla la ecuación vectorial, las paramétricas, la continua y la implícita de la recta que pasa por el punto A $(-1, 6)$ y cuyo vector director es $\vec{v} = (-2, 5)$.

3 Dada la recta de ecuación $3x + 7y - 6 = 0$, halla el vector normal a la recta y un vector director.

4 Encuentra un vector unitario que sea perpendicular a la recta $y = \frac{3}{4}x + 2$.

5 Comprueba si el punto A $(-2, 3)$ pertenece a las rectas $r: 2x - 3y + 6$ y $s: \frac{x-2}{4} = \frac{y+2}{-5}$.

6 Halla el punto de intersección de las rectas:

$$r: 3x - 5y - 6 = 0 \text{ y } s: 6x + y + 3 = 0$$

7 Estudia la posición relativa de las rectas $r: 4x + y - 5 = 0$ y $s: mx + 2y + 5 = 0$, según el valor de m.

8 Encuentra la ecuación implícita de la recta que pasa por A $(1, -6)$ y es paralela a la recta $r: 7x + 2y - 10 = 0$.

9 Halla el ángulo formado por estas dos rectas:

$$r: 3x - 5y + 6 = 0 \text{ y } s: 10x + 6y + 3 = 0$$

10 Calcula el ángulo que forman las rectas:

$$r: 5x + y - 6 = 0 \text{ y } s: 6x - 4y + 1 = 0$$

11 Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto A $(-3, 5)$ y es perpendicular a la recta $r: 5x + y - 3 = 0$.

12 ¿Para qué valor de m son perpendiculares las rectas $r: 2x - 5y + 8 = 0$ y $x: mx + 6y + 3 = 0$?

13 Halla la distancia entre los puntos A $(-5, 4)$ y B $(6, -12)$.

14 Halla el valor de m para que la distancia del punto A $(2, 1)$ a la recta $r: 4x + 3y + m = 0$ sea 12.

1 Dados dos puntos A (2, 1) y B (17, 31), encuentra los puntos que dividen al segmento $\overline{AB}$ en cuatro partes, tales que cada una tenga de longitud el doble que la anterior.

2 Haya la ecuación de la recta perpendicular a r: $2x - y + 3 = 0$, que pasa por el origen de coordenadas.

3 Determina la ecuación de la recta paralela a r: $y = -4x + 7$, que, al cortar a los ejes coordenados, forma un triángulo de área 32.

4 Dado el punto A (–1, 1) y la recta de ecuación r: $2x - y - 2 = 0$, halla el punto simétrico de A respecto de r.

5 Obtén la ecuación del haz de rectas paralelas que, al cortar al semieje de ordenadas positivo, determina un segmento de longitud doble al que determina cuando corta al semieje de abscisas positivo.

6 Del haz del ejercicio anterior, obtén la recta que pasa por el punto P (1, –2).

7 Determina la posición relativa de las rectas r: $x + 2y - c = 0$ y s: $2x - my + 4 = 0$, según los valores de m y de c.

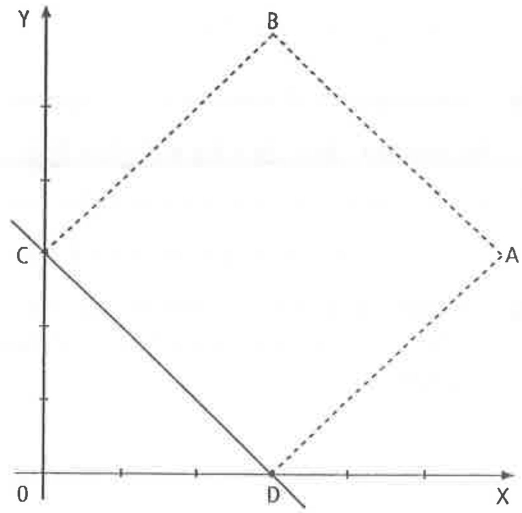
8 La recta r: $x + y - 3 = 0$ determina con los ejes de coordenadas un triángulo, y queremos formar un cuadrado de la forma que aparece en la figura, halla:

a) La ecuación de las rectas que contienen a los lados $\overline{CB}$ y $\overline{AB}$.

b) Las coordenadas de los puntos A y B.

c) La distancia que separa los puntos C y A.

d) El área del cuadrado.



Unidad 11 **Funciones reales de variable real**

1 Determina el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{4}{4x^2 - 16}$ c) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-3}{x}}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ d) $f(x) = \ln(x-4)$

2 Estudia la simetría de las funciones:

a) $f(x) = x^5 + x^3 - x$

b) $f(x) = \dfrac{x^4+1}{x^2}$

3 Sea f (x) una función par y g (x) una función impar. Estudia la paridad de $[g \circ f](x)$ y $[f \circ g](x)$.

4 Demuestra que la función $f(x) = 3x - 4$ es estrictamente creciente en el punto $x = 2$.

5 Demuestra que la función $f(x) = (x-1)^2$ es estrictamente creciente para $a \in (1, \infty)$.

6 Comprueba que $f(x) = x^2 - 4$ está acotada inferiormente por $k = -5$.

7 Demuestra que la función $f(x) = x^2 - 4x + 1$ está acotada inferiormente por $k = -5$.

8 Encuentra, si las tiene, las cotas inferiores y superiores, el supremo y el ínfimo de la función:

$$f(x) = 2x + 3 \qquad \text{si } x \in [-1, \infty)$$

9 Si $f(x) = x^2 + 3$ y $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$, halla:

a) Dom (f + g)

b) (f + g)(3)

c) (f – g) (0)

d) (f – 3g)(1)

10 Dadas las funciones $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ 3x + 1 & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$

y $f(x) = x^2 - x$ determina:

a) (1/g) (x) c) (f + g) (4)

b) (f · g) (x) d) (f/g) (x)

11 Si $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = x - 1$, calcula:

a) $(f \circ g)(x)$

b) Dom $(g \circ f)(x)$

c) $(g \circ f)(x)$

d) $(g \circ f)(3) + (f \circ g)(3)$

12 Dada la función $f(x) = 4x - 6$, resuelve las ecuaciones:

a) $(f \circ f)(x) = 2$ b) $(f \circ f)(x) = x^2 + 34$

13 Demuestra que si las funciones $f(x) = ax + b$ y $g(x) = cx + d$ son afines, entonces $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ son funciones afines que tienen la misma pendiente.

14 Si las funciones $f(x) = 3x + b$ y $g(x) = ax + 2$, averigua qué relación deben de cumplir a y b para que se verifique:

$$(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$$

15 Halla la función inversa de las funciones:

a) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$

16 Si $f(x) = \dfrac{ax+b}{x-c}$, halla qué relación deben de cumplir los coeficientes a, b y c para que la función f (x) verifique: $f^{-1}(x) = f(x)$.

11C

15 a) $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x-2}$

b) $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$

16 Calculando la inversa de $f(x)$, tenemos:

$$f^{-1}(x) = \frac{xc+b}{x-a}$$

Igualando $f(x)$ y su inversa, obtenemos:

$$\frac{ax+b}{x-c} = \frac{xc+b}{x-a} \Rightarrow (ax+b)(x-a) = (xc+b)(x-c) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ax^2 + bx - a^2x - ab = cx^2 + bx - c^2x - cb \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ax^2 - a^2x - ab = cx^2 - c^2x \cdot cb$$

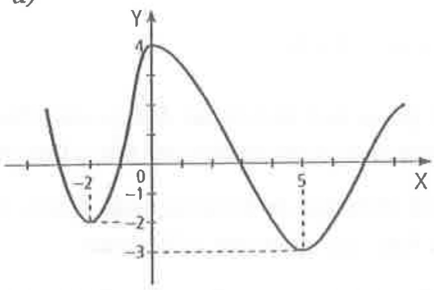
Como dos polinomios son iguales cuando los coeficientes de las indeterminadas del mismo grado son iguales, se tiene que a = c.

Unidad 11 Funciones reales de variable real

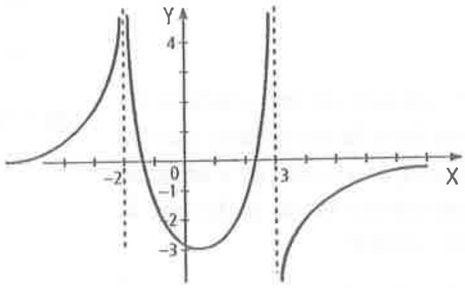
1 Halla el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2 + x^3 - 3$ *b)* $g(x) = \sqrt{6x + 24}$ *c)* $h(x) = \dfrac{8x}{x^2 - 25}$

d)



e)



2 Estudia la paridad de las siguientes funciones:

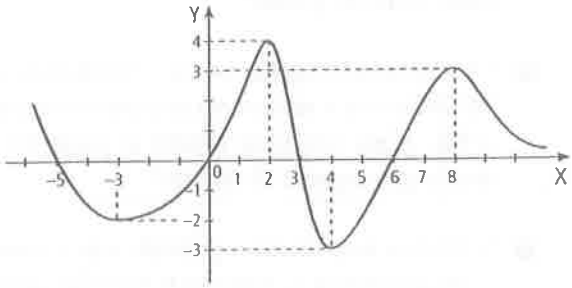
a) $f(x) = x^3 - x$

b) $g(x) = \dfrac{x^2 + 4}{x^4 + 2x^2}$

c) $h(x) = \dfrac{x^3}{x^5 + 3x}$

d) $j(x) = 5x^2 + x - 3$

3 Determina los intervalos de monotonía, los extremos relativos, la acotación y los extremos absolutos de la siguiente función:



4 Representa gráficamente la función $f(x) = |x^2 - 25|$. Determina su simetría, sus extremos relativos y absolutos, y los intervalos de monotonía.

5 Sean $f(x) = 2x^2 + 3$ y $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$; halla:

a) $(f \circ g)(x)$ *b)* $(g \circ f)(x)$ *c)* $(g \circ g)(x)$

6 Sean las funciones $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 1 \\ 3x + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ y $g(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Halla:

a) $(f + g)(x)$ *b)* $(f \cdot g)(x)$ *c)* $g^{-1}(x)$ *d)* $\mathrm{Dom}\,(g^{-1})$

7 Halla los valores de los parámetros *a* y *b* para que $f(x) = ax + b$ verifique: $(f \circ f)(x) = 4x + 9$.

8 Demuestra que dada una función *f*, se verifica: $(f \circ f) = \mathrm{Id} \Leftrightarrow f = f^{-1}$

Unidad 12 Funciones elementales

1 Estudia sin hacer la gráfica las características más notables de las funciones:

a) $y = x^2 - 10x + 4$

b) $y = -(x-2)^2$

2 Los controles de calidad de una cadena de montaje de coches han determinado que el porcentaje de coches que al cabo de t años no ha sufrido ninguna avería viene dado por la función $f(t) = 100 \cdot (0{,}98)^t$.

a) Representa la gráfica de la función en $t \in [0, 6]$.

b) ¿Es real el resultado obtenido en la función cuando $t = 50$?

c) Encuentra el porcentaje de coches que no han sufrido ninguna avería al cabo de tres años, y al cabo de seis años.

3 Dada la función $f(x) = 3x + 1/x$, di sus características más notables sin realizar su gráfica.

Escribe una función cuya gráfica tenga la misma forma que la de $f(x)$, pero que esté desplazada 5 unidades hacia abajo y tres hacia la derecha respecto a la gráfica de $f(x)$.

4 Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $f(x) = |x^2 - 4|$

b) $f(x) = |x + 4|$

5 Expresa las siguientes funciones como funciones a trozos, quitando el valor absoluto.

a) $f(x) = |3x - 9|$

b) $f(x) = |x^2 - x - 6|$

6 Una empresa nos ofrece las dos posibilidades siguientes para conectarnos con ella a Internet.

— Cuota mensual de 6 euros, más 1 euro por cada hora de conexión o fracción.

— Tarifa plana de 50 euros mensuales, es decir, sin límite diario de horas de conexión.

Si suponemos que el mes es de 30 días, ¿a partir de cuántas horas diarias es más rentable una opción que otra?

Si sólo nos conectamos de lunes a viernes, ¿a partir de qué consumo semanal es más interesante la tarifa plana?

7 Una persona ingresa en una entidad bancaria 80 000 euros a un interés compuesto anual del 2,9%. ¿Qué cantidad tendrá al pasar 10 años desde que ingresó el dinero?

8 Si $f(x)$ es una función periódica de período P, ¿será periódica la función $f(2x)$? En caso afirmativo encuentra cuál es su período.

12C

6 La primera opción nos viene dada por la función $f(x) = 6 + x$, y la segunda opción por la función $g(x) = 50$.

Ambas opciones son equivalentes cuando $f(x) = g(x)$, es decir: $6 + x = 50 \Rightarrow x = 44$.

Cuando utilizamos más de 44 horas al mes es más rentable la segunda opción, es decir, a partir de $\frac{44}{30} = 1{,}46$ horas diarias.

Si el consumo es de lunes a viernes, a partir de $\frac{44}{20} = 1{,}7$ horas diarias es más rentable la 2.ª opción y para menos tiempo es mejor la 1.ª opción.

7 $C_{10} = C \cdot \left(1 + \frac{R}{100}\right)^{10} = 80\,000 \cdot (1{,}029)^{10} =$

$= 80\,000 \cdot 1{,}33 = 106\,400$ euros.

8 Sí, y su período es P/2.

1 Si la ecuación para obtener los grados centígrados a partir de los grados Farenheit es:

$$y = \frac{5}{9}x - \frac{160}{9}$$

a) Indica la temperatura en grados Farenheit de Cuenca un día en que su temperatura en grados centígrados es de 15°.

b) Representa gráficamente esta función.

c) Comprueba sus propiedades.

2 Dada la función $f(x) = x^2 - 4x - 5$, exprésala gráficamente, comprueba que está acotada inferiormente y determina sus extremos relativos.

3 ¿En qué intervalos de la recta real se verifica que $x^2 > -x + 6$? Dedúcelo utilizando las representaciones gráficas de $y = x^2$ y de $y = -x + 6$ en los mismos ejes de coordenadas.

4 Representa gráficamente la función $y = \frac{4}{x}$, y comprueba su dominio, sus intervalos de monotonía y su simetría.

5 Expresa gráficamente la función:

$$f(x) = \text{sen}\,(x/3)$$

6 Representa gráficamente la función:

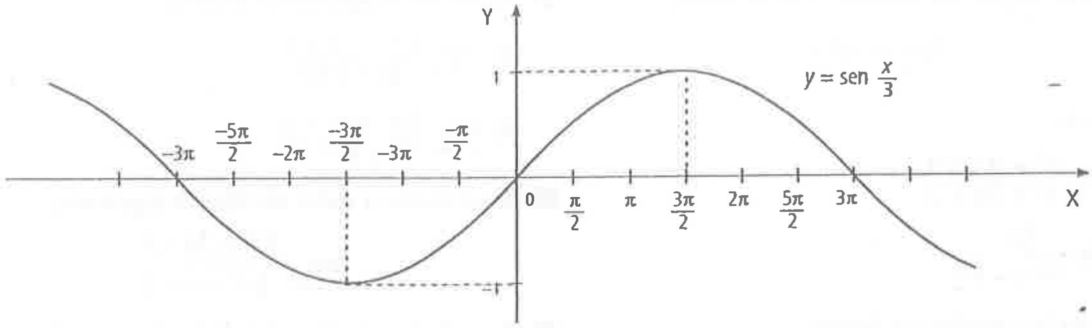
$$f(x) = \begin{cases} -4 & \text{si} \quad x < -2 \\ 2 & \text{si} \quad -2 \le x < 2 \\ x+1 & \text{si} \quad 2 < x \le 5 \\ 6-x & \text{si} \quad 5 \le x \end{cases}$$

7 Expresa gráficamente la función:

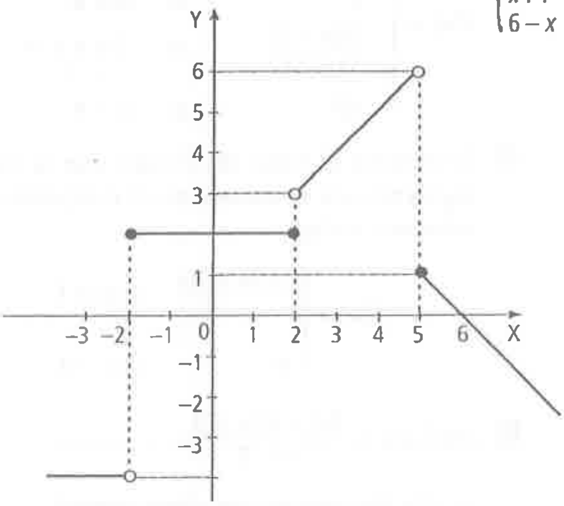
$$f(x) = |x^2 - 2x - 3|$$

12E

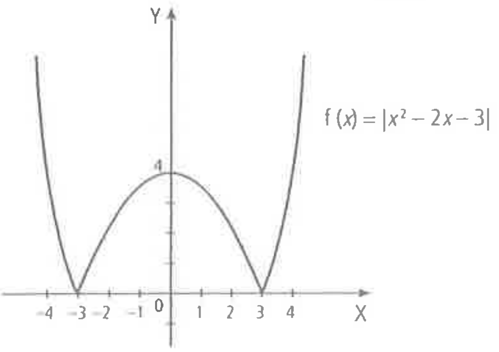
5 La gráfica de la función es la siguiente:



6 La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x) = \begin{cases} -4 & \text{si } x < -2 \\ 2 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ x+1 & \text{si } 2 < x < 5 \\ 6-x & \text{si } 5 \leq x \end{cases}$



7 La gráfica de la función es la siguiente:



Unidad 13 Límite de funciones. Continuidad

1 Calcula, según los valores de n, el límite:

$$\lim_{x \to x_0} (-1)^n x$$

2 Calcula:

a) $\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 + 3x + 2}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{5x}{\sqrt{4-x} - 2}$

3 Calcula los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 2x - 3}$

4 Encuentra el valor de los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{9-x} - 2}{x - 5}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to 7} \frac{-x^2 + 2}{x - 7}$

5 Halla el valor de m para que:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + mx + 3}{2x + 4} = \frac{3}{2}$$

6 Calcula $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 3x + 1}{\sqrt[3]{x^6 - x^4 + 6}}$

7 Localiza para qué valor de a se cumplirá que:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x + ax^3 + 3}{2x^3 + x^2 + 6} = 5$$

8 Calcula los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{7x^2 - 5x + 1}{3x + 14x^2}$

b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2 + x - 5}{5x + x^2 - x^3}$

9 Encuentra el valor del límite siguiente:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + 3x + 1}{\sqrt{x^4 + x} + 2}$$

10 Estudia la continuidad de la siguiente función a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si} \quad x < 2 \\ 5 & \text{si} \quad x = 2 \\ \dfrac{10x + 5}{3x - 1} & \text{si} \quad 2 < x \leq 4 \\ 10 & \text{si} \quad x > 4 \end{cases}$$

11 Encuentra el valor de k para que la función siguiente sea continua en el conjunto de los números reales:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-3k + 3x}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 6 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

12 Sea $f(x) = \dfrac{6x^2 - 17x - 3}{x - 3}$.

a) ¿Es discontinua en algún punto?

b) Si es así, ¿podría evitarse dicha discontinuidad?

Unidad 13 Límite de funciones. Continuidad

1 Calcula los límites de las siguientes sucesiones:

$$a_n = \frac{3n+1}{(n-2)^2+5n}$$

$$b_n = \frac{2n}{n^2+1} + 3$$

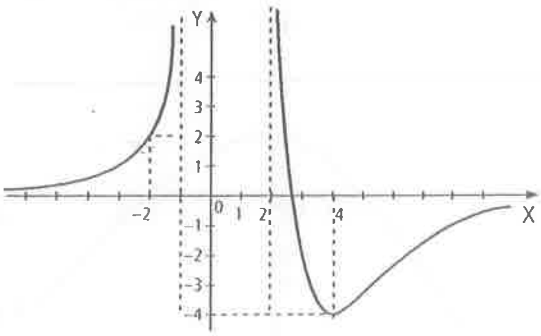
$$c_n = \frac{(n+3)^2}{2n-n+1}$$

2 Sabiendo que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 5$, calcula:

a) $\lim\limits_{x \to 3} [4\,f(x) - 3]$

b) $\lim\limits_{x \to 3} [2\,(f(x))^2 - 3f(x)]$

3 A partir de la gráfica de f (*x*), que se muestra a continuación, calcula los límites que se indican:



a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to -2} f(x)$

d) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

f) $\lim\limits_{x \to 4} f(x)$

4 Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x+6}{x^2+6x+9}$

b) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^4+8}{x^2-2}$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-2x}{2x^2-8}$

5 Averigua los límites siguientes:

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x}} \cdot \dfrac{2x}{3}\right]$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{16x^2+x+1} - 4x\right)$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \left[\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{7x}\right]$

6 Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} -6 & \text{si } x \le 2 \\ 3x - 12 & \text{si } 2 < x < 5 \\ x + 1 & \text{si } 5 \le x \end{cases}$$

7 ¿Cuáles deben ser los valores de *m* y *n* para que sea continua la siguiente función?

$$f(x) = \begin{cases} x + 6 & \text{si } x \le 0 \\ m + 4x & \text{si } 0 < x < 5 \\ 5x + n & \text{si } 5 \le x \end{cases}$$

Unidad 7 **Derivada de una función**

1 Halla la tasa de variación media de las siguientes funciones en los intervalos que se indican.

a) $f(x) = x^3 - x$ en $[0, 4]$

b) $f(x) = 3 - (x-1)^3$ en $[-1, 2]$

2 Determina la tasa de variación instantánea de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 1$ en $x = 3$

b) $f(x) = \dfrac{3}{x}$ en $x = -1$

c) $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$ en $x = 1$

3 Estudia la derivabilidad en el punto $x = 2$ de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 2 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

4 Dada la función $f(x) = x^3 - x^2 + 1$, determina la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abcisa $x = 2$.

5 Determina en qué punto o puntos de su gráfica, la función $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + x$, tiene una recta tangente que es paralela a la recta de ecuación $y = -2x + 3$.

6 Encuentra en qué puntos de su gráfica, la función $f(x) = x^2 - 3x$ tiene rectas tangentes que forman un ángulo de 45° con el eje de abscisas.

7 Calcula la función derivada de las funciones:

a) $f(x) = x^3 + (2x-1)^2$

b) $f(x) = e^{x^2 - x^3}$

c) $f(x) = \cos(e^x)$

d) $f(x) = (\text{sen } x)^x$

e) $f(x) = \ln(\text{sen } x^2)$

f) $f(x) = \sqrt{\ln x}$

g) $f(x) = \ln \sqrt{x^2 + 1}$

h) $f(x) = (x^2 - 1)^{x^3 - x}$

8 Estudia la derivabilidad de la función:

$$f(x) = |x - 1|$$

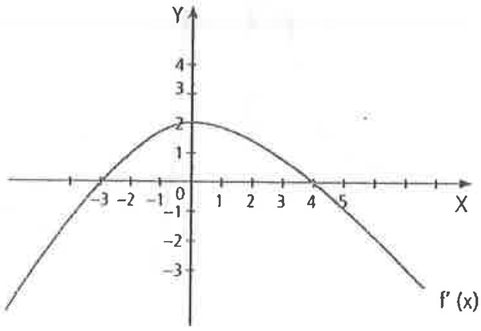
9 Determina en qué puntos no son derivables las funciones:

a) $f(x) = |x|$

b) $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 1 \\ 3x + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

10 Estudia los intervalos de monotonía y los extremos relativos de la función $f(x) = x^3 - 12x$.

11 Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, sabiendo que la gráfica de su función derivada es la siguiente:



12 Encuentra dos números reales positivos cuyo producto sea 100 y su suma sea mínima.

13 Determina los intervalos de monotonomía de la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$. Encuentra los extremos relativos de dicha función.

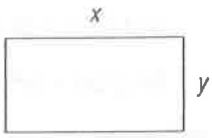
14 Demuestra que de todos los rectángulos de perímetro K, el de área maxima es un cuadrado.

14C

13 La función es estrictamente creciente en $(-\infty, 2) \cup (4, \infty)$ y estrictamente decreciente en $(2, 4)$. Tiene un máximo relativo en el punto de abscisa $x = 2$ y un mínimo relativo en el punto de abscisa $x = 4$.

14 Del enunciado se extrae el siguiente sistema:

$$\left.\begin{aligned} 2x + 2y &= k \\ A &= x \cdot y \end{aligned}\right\}$$



Despejando y en la primera ecuación, se tiene:

$y = \dfrac{k - 2x}{2}$ y sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos:

$$A = x \cdot \frac{k - 2x}{2} = \frac{1}{2}(k\,x - 2x^2)$$

Derivando e igualando a cero:

$$A'(x) = \frac{1}{2}(k - 4x) = 0 \leftrightarrow x = \frac{k}{4}$$

Calculando la derivada segunda y sustituyendo el valor de x obtenido:

$$A''(x) = \frac{1}{2}(-4) = -2$$

$$A''\left(\frac{k}{4}\right) = -2 < 0$$

Como la derivada segunda para ese valor es negativa, tenemos que ahí se alcanza un máximo, luego si $x = \dfrac{k}{4}$ e $y = \dfrac{k}{4}$ el área es máxima, y el rectángulo es un cuadrado.

1 Utilizando la definición, calcula la derivada de la función $f(x) = 2x^2 - 6$ en el punto $x = 3$.

2 Calcula la función derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = (5x^2 - 3x)^3$

b) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{3x}$

c) $f(x) = \dfrac{\ln x^2}{3x^3}$

d) $f(x) = (\operatorname{tg} x)^5$

e) $f(x) = \ln(\operatorname{sen}^2 x)$

f) $f(x) = \cos[\ln(x^4 + 3)]$

3 ¿Qué valor debe tomar k para que la derivada de la función $f(x) = \dfrac{x^3 + kx - 3}{x + 2}$ tome el valor 3 en el punto $x = 1$?

4 Calcula las derivadas sucesivas en $x = -2$ de la función $f(x) = 2x^3 - x^2 + 4$.

5 Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = (3x + 8)^{\ln x}$

b) $g(x) = (x^2 + \operatorname{sen} x)^{\cos x}$

6 Indica en qué puntos no son derivables las siguientes funciones:

a) $f(x) = |x^2 - 4|$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ \dfrac{1}{2}x + 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

7 Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a $f(x) = \dfrac{2x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 3x$ en los puntos para los que dichas rectas sean paralelas a la recta $y = 3x + 5$.