Números racionales e irracionales

1 Sin realizar la división, di qué fracciones dan lugar a decimales limitados y cuáles a decimales ilimitados periódicos:

$$\frac{7}{99},\ \frac{6}{15},\ -\frac{3}{14},\ \frac{2}{9},\ \frac{15}{17},\ -\frac{11}{8},\ \frac{21}{30},\ \frac{23}{990},\ \frac{81}{90},\ -\frac{68}{85}$$

2 Halla la fracción generatriz irreducible de estos números decimales:

$$0{,}0\overset{\frown}{32},\ -7{,}\overset{\frown}{39},\ 31{,}0\overset{\frown}{9},\ 2{,}\overset{\frown}{312},\ -5{,}355$$

Solución: $0{,}0\overset{\frown}{32} = 16/495$; $-7{,}\overset{\frown}{39} = -244/33$; $31{,}0\overset{\frown}{9} = 311/10$; $2{,}\overset{\frown}{312} = 770/333$; $-5{,}355 = -1\,071/200$

3 Ordena de menor a mayor:

$$0{,}40,\ 0{,}45,\ 7/16,\ 1/2,\ 0{,}\overset{\frown}{428571},\ 5/12,\ 0{,}\overset{\frown}{407},\ 13/32$$

Solución: $0{,}40 < 13/32 < 0{,}\overset{\frown}{407} < 5/12 < 0{,}\overset{\frown}{428571} < 7/16 < < 0{,}45 < 1/2$

4 Realiza estas operaciones y expresa el resultado en forma decimal:

a) $2{,}\overset{\frown}{18} \cdot 0{,}\overset{\frown}{4}$
b) $0{,}\overset{\frown}{21} \cdot 2/7$
c) $3 \cdot 0{,}2\overset{\frown}{7}/0{,}\overset{\frown}{24}$
d) $5 \cdot 2{,}\overset{\frown}{9}/3$

Solución: *a)* $0{,}\overset{\frown}{96}$ *b)* $0{,}0\overset{\frown}{6}$ *c)* $3{,}437\,5$ *d)* 5

5 Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt{0{,}\overset{\frown}{4}}$ *b)* $\sqrt{0{,}18\overset{\frown}{7}}$ *c)* $\sqrt{1/0{,}00\overset{\frown}{1}}$

Solución: *a)* $0{,}\overset{\frown}{6}$ *b)* $0{,}4\overset{\frown}{3}$ *c)* 30

6 Clasifica en racionales e irracionales cada uno de los siguientes números reales:

a) $11{,}003\,003\,003\,003\ldots$
b) $-2{,}797\,140\,797\,140\ldots$
c) $\sqrt{4{,}9}$
d) $\sqrt[3]{0{,}0\overset{\frown}{01}}$
e) $\sqrt[5]{-32}$
f) $3\sqrt{2{,}\overset{\frown}{7}}$
g) $\sqrt{1{,}21/25}$
h) π^2

7 Representa sobre la recta real $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ y $\sqrt{7}$. se ¿Cómo representarían $\sqrt{29}$, $\sqrt{50}$ y $\sqrt{148}$?

8 Escribe tres números irracionales entre 12 y 13.

9 Escribe un número racional y otro irracional que pertenezcan al intervalo $(-4, -3{,}98)$.

10 Ordena de menor a mayor -4, $-3{,}9\overset{\frown}{8}$, $-3{,}\overset{\frown}{98}$, $5{,}1\overset{\frown}{7}$, $5{,}\overset{\frown}{17}$, $5{,}170\overset{\frown}{9}$, $5{,}171$, π, $3{,}1416$, $3{,}141593$, $3{,}1415926$.

11 Representa sobre una recta graduada los siguientes números: $-2{,}\overset{\frown}{3}$, $0{,}05$, $1{,}9$.

12 Escribe un número decimal que sea 3 milésimas menor que:

a) $-0{,}097$
b) $1{,}567\,57$
c) $47{,}76$
d) $-\pi$

13 Indica la relación de orden que existe entre los siguientes pares de números:

a) $1{,}209$ y $1{,}20\overset{\frown}{9}$
b) $1/1{,}209$ y $1/1{,}20\overset{\frown}{9}$
c) $-1/1{,}209$ y $-1/1{,}20\overset{\frown}{9}$
d) $-2 \cdot 1{,}209$ y $-2 \cdot 1{,}20\overset{\frown}{9}$

14 *a)* Sabiendo que los segmentos en que se divide OP son de la misma longitud, indica qué números racionales representan los puntos A, B, C y D de la siguiente figura:

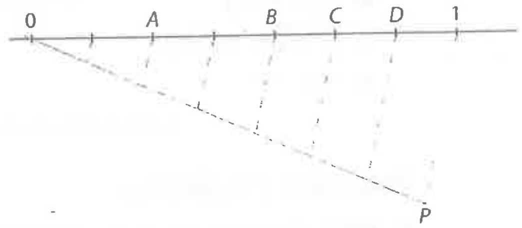


FIGURA 1.11.

b) Determina qué números irracionales representan los puntos P, Q, R y S de la figura:

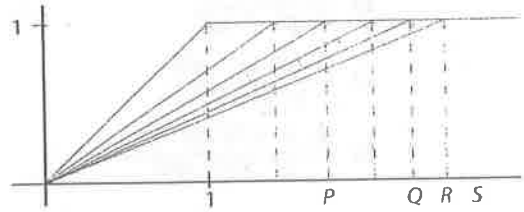


FIGURA 1.12.

Intervalos y valor absoluto

15 Representa sobre la recta los siguientes intervalos:

a) $[-2, 3]$
b) $(5, 7]$
c) $[-4, 1)$
d) $[2, +\infty)$

16 Dado el intervalo $(-3{,}7,\ -\pi)$ de la recta real, indica cuáles de los siguientes puntos pertenecen a él:

$$-3{,}72,\ -3{,}46,\ -11\pi/10,\ -3{,}14$$

17 Determina a qué intervalo pertenecen los números reales que cumplen las siguientes condiciones:

a) $-4/3 < x \leq 10$
b) $1/5 \leq x \leq 0{,}25$
c) $x > 7$ y $x \leq 9$
d) $x \leq -9/5$
e) $x > 21/4$
f) $x < 13$ y $x \leq 14$

18 ¿A qué intervalo pertenece x?

a) $0 < \frac{x}{4} + 1 \leq 7$
b) $-2 \leq -x + 3 < 4$

Solución: *a)* $x \in (-4, 24]$ *b)* $x \in (-1, 5]$

19 Si $|-x + 3| \leq 7$, ¿a qué intervalo pertenece x?

Solución: $x \in (-4, 10]$

20 ¿Qué conjunto de números reales, x, cumplen la desigualdad $|2x - 1| > 2$?

Solución: $(-\infty, -1/2) \cup (3/2, +\infty)$

21 Calcula las siguientes expresiones:

a) $|2 \cdot |-3| + |-5+6|| - |-|7-9| \cdot (-1)|$
b) $|(3/5) \cdot (1/3 - 4) \cdot |1 - (5/2)||$
c) $|(\sqrt{5}/3) - 1| - |3 - 2\sqrt{5}|$

Solución: *a)* 5 *b)* $33/10$ *c)* $4 - 7\sqrt{5}/3$

22 Calcula la amplitud de estos intervalos en la recta real:

a) $(x-3,\ x+3)$

b) $\left(\sqrt{2},\ 5\sqrt{2}\right)$

c) $\left(-\sqrt{3}/2,\ 7\sqrt{3}/5\right)$

d) $(8/3,\ 13)$

Solución: *a)* 6 *b)* $4\sqrt{2}$ *c)* $19\sqrt{3}/10$ *d)* $31/3$

Potencias y radicales

23 Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{2^3 \cdot 5^{-7} \cdot 7^3}{(-2)^{-4} \cdot 5^7 \cdot 7^3}$

b) $\dfrac{a^{-4} \cdot (6^2)^{-1} \cdot b^2}{2^3 \cdot 3^2 \cdot a^6 \cdot b^{-7}}$

c) $\dfrac{(a \cdot b)^2 \cdot (a^{-3} \cdot b^3)^3}{(a \cdot b^2 \cdot c^3)^{-5}}$

d) $\dfrac{(4 \cdot 3^2 \cdot 6^{-2})^2 \cdot (2^3 \cdot 3^4)^{-1}}{(2^6 \cdot 3^7)^{-3} \cdot (6^4)^3}$

Solución: *a)* $\dfrac{2^7}{5^{14}}$ *b)* $\dfrac{b^9}{a^{10}2^5 3^4}$ *c)* $\dfrac{b^{21}c^{15}}{a^2}$ *d)* $2^3 \cdot 3^5$

24 Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\left(\dfrac{3}{5} - \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2}\right)^2$

b) $\left(-2 - \left(\dfrac{-1}{4}\right)^{-3}\right)^{-2}$

c) $\left(\dfrac{3}{8} - (-2)^{-3}\right)^3$

Solución: *a)* $49/2\,025$ *b)* $1/3\,844$ *c)* $1/8$

25 Introduce factores dentro del radical:

a) $2\sqrt{\dfrac{7}{8}}$

b) $\dfrac{2^3 \cdot 5}{3}\sqrt[3]{\dfrac{3^2 \cdot 7 \cdot 5}{2^2}}$

c) $(x-3)^2\sqrt[3]{(x-3)^2(x+3)}$

26 Extrae factores del radical:

a) $\sqrt{2^3 \cdot 8^{-2}}$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{3^4 \cdot 12^{-1} \cdot 7^3}{2^2}}$

c) $\sqrt{\left(1-\dfrac{3}{11}\right)\cdot\left(\dfrac{6}{25}+\dfrac{3}{4}\right)}$

d) $\sqrt{24a^5b^6 - 32a^9b^4}$

e) $\sqrt[3]{8m^4n^6p^8}$

f) $\sqrt[6]{1\,024}$

g) $\sqrt[5]{2\,187x^9y^{12}}$

h) $\sqrt{4^2 \cdot 3^2 \cdot 12^2x^5y^7}$

27 Expresa las siguientes potencias como raíces:

a) $2^{3/4}$ *b)* $12^{5/7}$ *c)* $3^{-1/4}$

28 Expresa estas raíces en forma de potencias:

a) $\sqrt[5]{3^2}$ *b)* $\sqrt[3]{10^2}$ *c)* $\dfrac{3}{\sqrt[3]{7}}$

29 Expresa en forma de potencias de exponente fraccionario:

a) $\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{3^5}{2^3}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{3^{-5}}} \cdot \sqrt[3]{2^4 \cdot 2^{-2}}$

c) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2^3}}}$

Solución: *a)* $2^{-1/12} \cdot 3^{5/4}$ *b)* $2^{4/3} \cdot 3^{11/6}$ *c)* $2^{11/8}$

30 Realiza los siguientes cálculos:

a) $\sqrt[3]{0{,}04} \cdot \sqrt{0{,}2}$

b) $\left(\sqrt{2}\right)^3 \cdot \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{6}}$

c) $\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt[6]{8} \cdot \sqrt[8]{81}$

d) $\sqrt[5]{5} \cdot \sqrt[3]{2}$

Solución: *a)* $\dfrac{1}{5\sqrt[6]{5}}$ *b)* $\sqrt[6]{\dfrac{2^2}{2^3}}$ *c)* $2\sqrt{3}$ *d)* $\sqrt[15]{4\,000}$

31 Realiza estos cálculos simplificando al máximo:

a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{4}$

b) $\sqrt{32} + \sqrt{18} - \sqrt{3}$

c) $\sqrt[3]{\sqrt{5}}$

d) $\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{2^2}}}{\sqrt{\sqrt[3]{2}}}$

Solución: *a)* $\sqrt[6]{432}$ *b)* $7\sqrt{2} - \sqrt{3}$ *c)* $\sqrt[6]{5}$ *d)* $\sqrt[3]{2^2}$

32 Efectúa el cálculo y expresa el resultado como un radical:

$$\frac{3^{-3/4} \cdot 9^{3/2}}{\left(\sqrt{3}\right)^{-3} \cdot \sqrt{81}}$$

Solución: $3^{7/9} = 3\sqrt[4]{3^3}$

33 Calcula las siguientes expresiones con radicales:

a) $\sqrt{10} + 2\sqrt{10} - \dfrac{1}{2}\sqrt{10}$

b) $3\sqrt{12} - 2\sqrt{75} + 7\sqrt{3}$

c) $\sqrt{243} - 5\sqrt{3} + 2\sqrt{27}$

d) $3\sqrt{8} - 5\sqrt{72} + \sqrt{50} + 4\sqrt{18}$

e) $\sqrt{32} - 5\sqrt{18} + \sqrt{3}$

f) $3\sqrt{8} + 2\sqrt{50} - 4\sqrt{18}$

g) $5\sqrt{27} + 3\sqrt{12} - 4\sqrt{75}$

h) $\sqrt{512} + \sqrt{648} + \sqrt{\dfrac{128}{81}}$

i) $\sqrt{75} - \dfrac{\sqrt{18}}{3} + \dfrac{3\sqrt{12}}{4} - \sqrt{\dfrac{2}{25}}$

Solución: *a)* $\dfrac{5}{2}\sqrt{10}$ *b)* $3\sqrt{3}$ *c)* $10\sqrt{3}$ *d)* $-7\sqrt{2}$ *e)* $\sqrt{3} - 11\sqrt{2}$ *f)* $4\sqrt{2}$ *g)* $\sqrt{3}$ *h)* $\dfrac{178}{9}\sqrt{2}$ *i)* $\dfrac{13}{2}\sqrt{3} - \dfrac{6}{5}\sqrt{2}$

34 Calcula cada una de las siguientes expresiones con radicales:

a) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2$

b) $\left(2-2\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{48}$

c) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{18}\right)^2+3\sqrt{56}$

d) $\left(1+\sqrt{5}\right)^2+\left(1-\sqrt{5}\right)^2$

Solución: *a)* $8+4\sqrt{3}$ *b)* $16\left(1-\sqrt{3}\right)$
c) $25-6\sqrt{2}+6\sqrt{14}$ *d)* 16

35 Efectúa, simplificando al máximo:

a) $2\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{20}-8\sqrt{45}\right)-\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)$

b) $-\sqrt[3]{-16}-\sqrt[3]{-54}-\sqrt[3]{-250}$

Solución: *a)* -218 *b)* $10\sqrt[3]{2}$

36 Realiza las siguientes operaciones:

a) $\sqrt[4]{x+1}\cdot\sqrt{(x+1)^3}\cdot\sqrt[8]{\dfrac{1}{(x+1)^7}}$

b) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{18}\right)^2+3\sqrt{56}$

c) $\left(\sqrt{a-b}+\sqrt{a+b}\right)\cdot\left(\sqrt{a-b}-\sqrt{a+b}\right)$

d) $\sqrt[3]{-4}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt[4]{9}$

Solución: *a)* $\sqrt[8]{(x+1)^7}$ *b)* 25 *c)* $-2b$ *d)* $-6\sqrt[6]{2}$

37 Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{1}{1-a}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{(a+1)^2}}\cdot\sqrt[3]{(1-a)^2}$

b) $\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{a\sqrt{a}}$

Solución: *a)* $\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1-a)\cdot(1+a)^2}}$ *b)* $a\sqrt[3]{a}$

38 Determina si son ciertas o falsas las igualdades que se dan a continuación:

a) $\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2-9}}=\sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}}$

b) $\sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}$

39 Racionaliza las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{\sqrt{6}-2}{\sqrt[3]{9}}$

c) $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

d) $\dfrac{\sqrt[3]{2}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-2}$

Solución: *a)* $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{6}$ *b)* $\dfrac{\left(\sqrt{6}-2\right)\cdot\sqrt[3]{3}}{3}$
c) $6+\sqrt{35}$ *d)* $\dfrac{-\sqrt[6]{32}}{2}-\sqrt[3]{2}+\sqrt{2}+1$

40 Calcula el resultado de las siguientes operaciones, simplificando al máximo:

a) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}-\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\dfrac{2}{\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+1}\cdot\sqrt{\sqrt{5}-1}}{\sqrt{\sqrt{8}+2}\cdot\sqrt{\sqrt{8}-2}}$

c) $\sqrt{2\sqrt{\dfrac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{\dfrac{1}{2}}}}}$

d) $\left[\dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\dfrac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right]\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$

Solución: *a)* $-3\sqrt{2}$ *b)* 1 *c)* $\sqrt[16]{2^5}$ *d)* $13+6\sqrt{6}$

Aproximaciones y errores

41 A Brahmgupta (siglo VII a. C.) se le atribuye una aproximación de π que vale $\sqrt{10}$. Siglos después, en el III a. C., Arquímedes propuso otra: $\dfrac{245}{78}$. Calcula cuántas cifras exactas tiene cada aproximación y qué porcentaje de error se comete cuando se aproxima π con cada una de ellas.

42 Redondea a dos cifras decimales estos números e indica si la aproximación es por exceso o por defecto:

a) 3,056 79

b) −2,934 6

c) 0,000 78

d) 45,862 0

e) 4,345 05

f) −3,005 31

43 Calcula el error absoluto que se comete al tomar 0,71 como aproximación de 5/7.

Solución: $|3/700|$

44 Aproxima $\sqrt{13}$ con un error absoluto menor que una milésima. ¿Existe una sola aproximación?

45 El número decimal 7,543 es la aproximación por redondeo de cierto número real. ¿En qué intervalo está comprendido? Escríbelo e indica su incertidumbre.

46 A continuación se ofrece una tabla con las aproximaciones de algunos números reales. Cópiala y determina, para cada caso, el tipo de aproximación, la incertidumbre o cota de error y el intervalo en el que está comprendido el número exacto. Indica también el número de cifras exactas y el error relativo cometido. ¿Cuál de las aproximaciones crees que es la mejor?

Valor exacto	$(1+\sqrt{5})/2$	$\sqrt{5}$	−7,543 6	299 792,5	$\sqrt[3]{10}$
Valor aproximado	1,62	2,236	−7,544	300 000	2,154
Tipo aproximación					
Incertidumbre					
Intervalo					
Cifras exactas					
Error relativo					

47 Determina entre qué números están comprendidos los valores exactos de cada una de las siguientes aproximaciones:

a) $6{,}87 \pm 0{,}02$

b) $67\,894 \pm 5$

c) $0{,}0543 \pm 0{,}0001$

d) $67{,}0 \pm 0{,}2$

Notación científica

48 Utilizando la notación científica escribe las siguientes magnitudes en metros:

a) La Unidad Astronómica de distancia es la distancia media que separa la Tierra del Sol, su valor es 149,6 millones de kilómetros.

b) Un año-luz es la distancia que recorre la luz en un año (velocidad de la luz = 300 000 km/s).

c) El C-elegans fue el primer organismo cuyo genoma fue completamente secuenciado. Su longitud es de aproximadamente 1 mm.

Solución: ***a)*** $1{,}496 \cdot 10^{11}$ m ***b)*** $9{,}4608 \cdot 10^{15}$ m ***c)*** 10^{-3} m

49 Ordena de menor a mayor los siguientes números, expresándolos previamente en notación científica:

a) $3{,}23 \cdot 10^{18}$, $523{,}17 \cdot 10^{16}$, $444 \cdot 10^{17}$

b) $3{,}19 \cdot 10^{-12}$, $0{,}033 \cdot 10^{-10}$, $444 \cdot 10^{-14}$

50 Si $X = 3 \cdot 10^7$, $Y = 4{,}25 \cdot 10^5$ y $Z = 72{,}12 \cdot 10^{10}$, calcula, expresando el resultado en notación científica:

a) $(X+Y) \cdot Z$

b) $\dfrac{X \cdot Y}{Z}$

Solución: ***a)*** $2{,}19\,425\,1 \cdot 10^{19}$ ***b)*** $1{,}767\,886\,855 \cdot 10$

Logaritmos

51 Calcula:

a) $\log 0{,}000\,01$

b) $\log_5 (1/625)$

c) $\log_2 2\,048$

d) $\log_{1/3} \sqrt{3}$

e) $\log_{\sqrt{2}} 0{,}125$

g) $\log_a \sqrt[3]{a^7}$

g) $\log_{23} 1$

h) $\log_{13} \sqrt[5]{2\,197}$

i) $\log_3 12{,}5$

Solución: ***a)*** −5 ***b)*** −4 ***c)*** 11 ***d)*** −1/2 ***e)*** −6 ***f)*** 7/3 ***g)*** 0 ***h)*** 3 ***i)*** $5/\sqrt[3]{10}$

52 Utilizando las propiedades de los logaritmos, calcula la x en las siguientes expresiones:

a) $\log_x \left(\dfrac{1}{27}\right) = -3$

b) $\log_{1/2} 128 = x$

c) $\log_5 x = \dfrac{6}{5}$

d) $\log_x 4 = \dfrac{1}{8}$

e) $\log_x 4{,}9 = 0{,}16$

f) $\log_{\sqrt{3}} x = 6{,}5$

g) $\log_{x+1} 25 = 2$

h) $\log (x^3 - 25) = 2$

i) $\log_2 32^x = 0{,}1$

Solución: ***a)*** 3 ***b)*** −7 ***c)*** $\sqrt[5]{5^6}$ ***d)*** 2^{16} ***e)*** $4{,}9^{1/0{,}16}$ ***f)*** $\sqrt[4]{3^{13}}$ ***g)*** 4 ***h)*** 5 ***i)*** 1/50

53 Formula estas expresiones como un solo logaritmo:

a) $3(\log 5 + \log 2) - \log 2 - \log 7$

b) $\dfrac{3}{2}(1 - \log 5) + \dfrac{1}{2}\log 2$

c) $3 \ln 2 - 1 + \dfrac{\ln 5}{3}$

Solución: ***a)*** $\log (500/7)$ ***b)*** $\log 4$ ***c)*** $\log\left(8\sqrt[3]{5}/e\right)$

54 Halla el valor de a para que se cumplan las siguientes igualdades:

a) $\log_a 12 + \log_a 3 = 2$

b) $3^a = 10$

c) $\log a = 1 + 3\log 2 - \dfrac{1}{2}\log 64$

d) $\ln a = \log_3 243 - \log_{\sqrt{3}} \dfrac{1}{9}$

Solución: ***a)*** 6 ***b)*** ln 10/ln 3 ***c)*** 10 ***d)*** e^9

55 Calcula x para que se cumpla cada una de las siguientes igualdades:

a) $\log_8 (2x + 1) = -\dfrac{1}{3}$

b) $x^{0,8} = 1\,024$

c) $5^{x-2} = e$

d) $2^{x^2-1} = 3^{\ln 2}$

Solución: *a)* $x = -1/4$ *b)* $x = \sqrt{2^{25}}$
c) $x = 2 + (1/\ln 5)$ *d)* $x = \pm\sqrt{1 + \ln 3}$

56 Calcula cuánto vale k en cada caso:

a) $\log_a x - \log_{1/2} x^k = 1$

b) $\log_2 x^k = \log_4 x$

Solución: *a)* $k = -1$ *b)* $k = 1/2$

Ejercicios de aplicación

57 Indica cuál de las siguientes opciones es más conveniente:

- Que te cobren el precio de un artículo sin IVA.
- Que te cobren el precio del artículo más el 16 % de IVA y que después te hagan un descuento del 16 %.

Razona la respuesta.

58 Un comerciante vende sus artículos en las rebajas de enero al 80 % del precio que tenían en diciembre; en las rebajas de febrero los vende al 70 % del precio de las de enero. Determina:

a) El precio de un jersey en diciembre y enero si en febrero costaba 50 €.

b) El precio en diciembre y febrero de unos pantalones que en enero costaban 50 €.

Solución: *a)* 40 € y 28 €, respectivamente
b) 62,5 € y 35 €, respectivamente

59 Tres operarios remodelan una cocina trabajando 8 h diarias durante quince días. ¿En cuánto tiempo hubieran remodelado la cocina 4 operarios trabajando 9 h diarias?

Solución: 10 días

60 Al medir a un niño de 90 cm de altura se obtuvieron 91 cm y al medir un edificio de 30 m de altura se obtuvieron 31 m, determinar:

a) El error absoluto de las dos medidas.

b) El error relativo de las dos medidas.

c) ¿Cuál te parece la medida más precisa?

61 La arista de un cubo mide 6 cm. ¿Cuánto mide su diagonal?

Solución: 10,39 cm

62 Calcula la longitud de la diagonal de una caja de dimensiones 11 cm × 32 cm × 14 cm.

Solución: 36,62 cm

63 La pirámide de Keops tenía 230,35 m de lado y 146,6 m de altura, cuando la construyeron en el 2400 a.C. estaba recubierta de planchas de piedra pulida. ¿Cuántos metros cuadrados de piedra pulida necesitaron los constructores para recubrirla?

Solución: 85 889,16 m²

64 Se quiere construir un rectángulo áureo. Si el lado menor mide 7 cm, ¿cuánto deberá medir el lado mayor? (Recuerda que la razón áurea es $\phi = 1,618$)

Solución: 11,33 cm

65 Calcula el área de la zona sombreada si $D = 2\sqrt{2}$ cm, y expresa el resultado con cuatro cifras exactas.

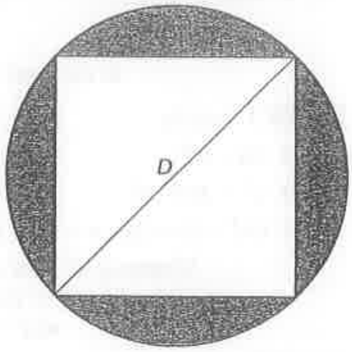


FIGURA 1.13.

Solución: 2,283 cm²

66 El punto G es el baricentro del triángulo isósceles ABC, $AB = AC = 5$ cm y $BC = 3$ cm. Sabiendo que G cumple $GM = \dfrac{1}{2}GA$, calcula el área del triángulo GBC y redondea el resultado con un error menor que una milésima.

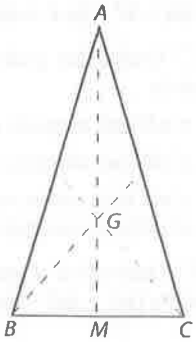


FIGURA 1.14.

67 El área de un hexágono regular es de $9\sqrt{3}$ cm². Halla la longitud del lado, expresando esta medida con un radical.

Solución: $\sqrt{3}$ cm

68 Aplicando las propiedades de los logaritmos, demuestra lo siguiente:

a) $\log_a x = -\log_{1/a} x$

b) $\log_{\sqrt{a}} x = 2\log_a x$

69 Una población sufre una fuerte emigración y en 10 años se ve reducida a la cuarta parte. Su decrecimiento es exponencial, del tipo $P = P \cdot e^{-kt}$, donde k es la tasa de decrecimiento, y t, el tiempo, medido en años. Calcula la constante k.

Solución: $k \cong 0,138$

70 El pH de una disolución es el logaritmo decimal del inverso de la concentración de iones hidronio, $[H_3O^+]$, es decir, pH = log $(1/[H_3O^+])$. El pH máximo es 14 y, evidentemente, siempre es positivo. Una disolución es ácida si su pH es menor que 7 y básica cuando es mayor que 7. ¿Cuál es el pH de una disolución cuya concentración de iones hidronio es de $6 \cdot 10^{-5}$ mol/L? ¿Es ácida o básica?

Solución: pH = 4,2

Polinomios y operaciones con polinomios

1 Dados $p(x) = 4x^3 - 2x^2 + 5x - 9$ y $q(x) = 7x^2 + 11x - 5$, halla:

a) $3p(x) - 2q(x)$ *b)* $\dfrac{p(x)}{q(x)}$

Solución: *a)* $12x^3 - 20x^2 - 7x - 17$
b) $c(x) = 4x/7 - 58/49$; $r(x) = 1\,023x/49 - 731/49$

2 Calcula:

a) $(3x - 4)^2$
b) $(x^2 - 3x + 1)^2$
c) $(3x^3 - 7x + 2)(-x - 2)x^2$
d) $(2x - 3)^3$
e) $(x^2 - 5x)(x^2 + 5x)$
f) $(x^3 - 2x^2 - 5)(x^3 - x)$

Solución: *a)* $9x^2 - 24x + 16$ *b)* $x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x + 1$
c) $-3x^6 - 6x^5 + 7x^4 + 12x^3 - 4x^2$ *d)* $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27$
e) $x^4 - 25x^2$ *f)* $x^6 - 2x^5 - x^4 - 3x^3 - 5x$

3 Calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a) $(x^5 - 3x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 3) : (x^2 - x + 3)$
b) $(2x^6 - 5x^5 + x^4 + 5x^2 + 5x) : (x^4 - 1)$
c) $(12x^4 - 15x^3 - 32x^2 + 41x + 6) : (4x^2 - 5x)$

Solución: *a)* $c(x) = x^3 - 2x^2 + 1$, $r(x) = x - 6$
b) $c(x) = 2x^2 - 5x + 1$, $r(x) = 7x^2 + 1$ *c)* $c(x) = 3x^2 - 8$, $r(x) = x + 6$

4 Dados dos polinomios, $P(x)$ de grado 5 y $Q(x)$ de grado 3:

a) ¿Cuál será el grado de $P(x) \cdot Q(x)$?
b) ¿Cuál será el grado de $P(x) : Q(x)$?
c) ¿Cuál será, como máximo, el grado del resto de la división $P(x)$ entre $Q(x)$?

5 Determina el valor de a y b para que sea exacta la división: $(3x^4 - 8x^3 - 5x^2 + ax + b) : (x^2 - 3x)$

Solución: $a = 6$, $b = 0$

6 Calcula el cociente y el resto de:

a) $(7x^3 - 5x^2 + 3x - 7) : (x + 2)$
b) $(4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x) : (x - 2)$
c) $(x^4 - 16) : (x + 2)$

Solución: *a)* $c(x) = 7x^2 - 19x + 41$, $r(x) = -89$
b) $c(x) = 4x^3 + 5x^2 + 12x + 23$, $r(x) = 46$
c) $c(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$, $r(x) = 0$

Factorización de polinomios y teorema del resto

7 Dados los polinomios $p(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ y $q(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 15$:

a) Calcula las raíces de $p(x)$ y de $q(x)$.
b) Descompón factorialmente los dos polinomios.
c) Calcula el M.C.D. y el m.c.m. de $p(x)$ y $q(x)$ ayudándote de sus descomposiciones factoriales.

Solución: *a)* De $p(x)$: $x = 1$, doble y $x = 3$. $q(x)$: $x = 5$, $x = 3$ y $x = 1$
b) $p(x) = (x - 3)(x - 1)^2$; $q(x) = (x - 3)(x - 1)(x - 5)$
c) M.C.D. $= (x - 3)(x - 1) = x^2 - 4x + 3$;
m.c.m. $= (x - 3)(x - 1)^2(x - 5) = x^4 - 10x^3 + 32x^2 - 38x + 15$

8 Utiliza el teorema del resto para determinar el resto de la división del polinomio $P(x) = x^4 - 7x^3 + 12x - 6$ entre $(x - 2)$ y entre $(x + 3)$.

Solución: *a)* -22 *b)* 228

9 Calcula el valor de m para que el polinomio:

$$p(x) = x^3 + mx^2 + (3m + 1)x - 2$$

sea divisible por el binomio $x + 2$.

Solución: $m = -6$

10 Si la división del polinomio $p(x)$ entre $(x + 2)$ es exacta, ¿qué puedes afirmar de $p(-2)$? ¿Y de $p(2)$?

11 Determinar en cada caso el valor de k, para que las siguientes divisiones sean exactas:

a) $(x^6 - x^4 + 3x^3 - kx^2 + x - 5) : (x - 1)$
b) $(x^5 + 3x^3 + 2x^2 + kx - 5) : (x + 1)$
c) $(x^5 - 7x^4 + 2x^3 + 8x^2 - x - k) : (x + 2)$

Solución: *a)* $k = -1$ *b)* $k = -7$ *c)* $k = -126$

12 Si dado el polinomio $q(x)$ se verifica que $q(-7) = 10$, ¿cuál será el resto de la división de $q(x) : (x + 7)$?

Solución: 10

13 Calcula el valor de m para que el resto de la división de $(x^4 - 7x^3 + mx^2 - 5x + 2)$ entre $(x - 2)$ sea 7.

Solución: $m = 55/4$

14 Sin efectuar divisiones, contesta razonadamente las siguientes preguntas:

a) ¿Es divisible $(x^3 - 64)$ por $(x - 4)$? ¿Y por $(x + 4)$?
b) ¿Es divisor $(x + 3)$ de $(x^4 - 81)$? ¿Y de $(x^4 + 81)$?
c) ¿Es el polinomio $p(x) = 2x^3 - 2x - 6x^2 + 6$ múltiplo del binomio $q(x) = x - 4$?

15 Halla el polinomio de segundo grado que satisfaga las siguientes condiciones:

a) Que el coeficiente de segundo grado sea -2.
b) Que sea divisible por $x - 3$.
c) Que al dividirlo por $x + 2$, el resto de la división sea -10.

Solución: $p(x) = -2x^2 + 4x + 6$

16 Dado el polinomio $p(x) = x^3 - ax^2 + 7x + b$, calcula a y b sabiendo que $p(x)$ es divisible por $(x - 5)$ y que el resto de dividir $p(x)$ por $(x - 2)$ es 9.

Solución: $a = 7$ y $b = 15$

17 Dado el polinomio $P(x) = 3x^4 - 5x^3 + 4x^2 - ax + b$, determina el valor de a y b sabiendo que al dividirlo por $(x - 1)$ la división es exacta, y que al dividirlo por $(x + 2)$ el resto es 101.

Solución: $a = -1/3$ y $b = -7/3$

18 Calcula a y b para que $p(x) = 2x^4 + ax^3 + bx^2 - 4x$ sea divisible por $(x + 4)$ y al dividirlo por $(x + 1)$ el resto sea -6.

Solución: $a = 7$ y $b = -5$

19 Siendo $p(x) = x^5 + ax^4 + 2x^3 - x^2 + bx - 2$, calcula a y b para que sea múltiplo de $(x - 1)$ y $(x + 2)$.

Solución: $a = 3$ y $b = -3$

20 Escribe tres polinomios de tercer grado que tengan por raíces:

a) 2, −2 y 7

b) 2 y −1

c) Únicamente 3

21 Escribe un polinomio de grado 4 que no tenga ninguna raíz real.

22 Calcula el M.C.D. y el m.c.m. de los siguientes polinomios:

- $p(x) = (x + 1)^2 \cdot (x - 2) \cdot (x^2 + 2x - 3)$
- $q(x) = (x^2 - 1) \cdot (x^2 - 4)$
- $s(x) = (x^2 + 6x + 9) \cdot (x^2 - 3x + 2)$

Solución: M.C.D. $= (x - 2)(x - 1)$;
m.c.m. $= (x + 1)^2(x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 3)^2$

23 Descompón factorialmente los siguientes polinomios y halla sus raíces:

a) $x^4 - 9$

b) $x^3 - 4x^2 + x + 6$

c) $x^3 + 3x^2 - 9x + 5$

d) $3x^3 - 9x^2 - 3x + 9$

24 Extrae factor común y utiliza las identidades notables para factorizar cada uno de los siguientes polinomios, y di cuáles son sus raíces:

a) $x^3 + 6x^2 + 9x$

b) $5x^4 - 20x$

c) $x^3 - 4x$

d) $2x^4 + 8x^2$

e) $6x^3 - 54x$

f) $\dfrac{x^3}{4} + x^2 + x$

25 Factoriza:

a) $x^5 - 2x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 16x + 24$

b) $4x^3 + 14x^2 + 6x$

c) $3x^3 - 6x^2 - 45x$

26 Determina las raíces de cada uno de los siguientes polinomios:

a) $x^4 - 7x^2 - 6x$

b) $x^5 + 3x^4 - x - 3$

c) $3x^4 - 5x^3 - 28x^2$

Solución: ***a)*** 0, −1, −2, 3 ***b)*** 1, −1, −3
c) 0 (doble), 4, −7/3

27 Si un polinomio, $P(x)$, tiene como raíces $x = -2$ y $x = 4$, ¿puede ser el grado de $P(x)$ mayor que dos?

28 Calcula un polinomio que tiene por cuadrado $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$.

Solución: $x^2 + 2x - 3$

29 Averigua el m.c.m. y el M.C.D. de los siguientes polinomios:

a) $A(x) = 2x^4 + x^3 - x^2$ y $B(x) = x^3 - x$

b) $A(x) = x^4 + 2x^2 + 1$, $B(x) = x^5 + 2x^3 + x$ y $C(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 4x^2 + x - 2$

c) $A(x) = x^4 + x^3 - x - 1$ y $B(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$

Solución: ***a)*** m.c.m. $= (x + 1)(x - 1)(2x - 1)x^2$; M.C.D. $= (x + 1)x$
b) m.c.m. $= x(x - 2)(x^2 + 1)^2$; M.C.D. $= (x^2 + 1)^2$
c) m.c.m. $= (x^2 + x + 1)(x + 1)(x - 1)^2(2x + 1)$; M.C.D. $= (x - 1)$

Fracciones algebraicas

30 Dada la fracción $\dfrac{x - 2}{x^2 + 1}$ determina una equivalente que tenga en el numerador un polinomio de grado 3.

31 Determina, en cada caso, $q(x)$ de modo que estas fracciones sean equivalentes:

a) $\dfrac{2x - 5}{4x} = \dfrac{q(x)}{12x}$

b) $\dfrac{3x + 1}{x^2} = \dfrac{3x^2 + x}{q(x)}$

c) $\dfrac{x + 3}{2x} = \dfrac{x^2 - 9}{q(x)}$

d) $\dfrac{x^2 - 4x}{x^4} = \dfrac{x - 4}{q(x)}$

Solución: ***a)*** $6x - 15$ ***b)*** x^3 ***c)*** $2x^2 - 6x$ ***d)*** x^3

32 Extrae factor común y simplifica cada una de las siguientes fracciones:

a) $\dfrac{3x^2 + 3xy}{2xy + 2y^2}$

b) $\dfrac{2x^2 - 8}{2x^2 - 8x + 8}$

c) $\dfrac{x^3 - xy^2}{2x^2 - 2xy}$

Solución: ***a)*** $\dfrac{3x}{2y}$ ***b)*** $\dfrac{(x + 2)}{(x - 2)}$ ***c)*** $\dfrac{(x + y)}{2}$

33 Calcula la fracción irreducible equivalente a las siguientes fracciones:

a) $\dfrac{x^2 - 1}{x^3 + 2x^2 - 3x}$

b) $\dfrac{7x(x + 2)}{x^3 - 4x}$

c) $\dfrac{6x^2 - 30x + 36}{3x^2 - 9x + 6}$

Solución: ***a)*** $\dfrac{x + 1}{x^2 + 3x}$ ***b)*** $\dfrac{7}{x - 2}$ ***c)*** $\dfrac{2(x - 3)}{x - 1}$

34 Averigua si existe un polinomio $p(x)$ que verifique la siguiente igualdad:

$$\frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1} = \frac{p(x)}{x + 1}$$

Solución: $p(x) = x + 5$

35 Simplifica las siguientes fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$

b) $\dfrac{x^3 - 64}{x^2 - 16}$

c) $\dfrac{2x^5 + x^3 + 2x^2 - 10x + 5}{2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 4x + 3}$

d) $\dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^3 + 3x^2 - x - 3}$

Solución: ***a)*** $\dfrac{x + 1}{x - 1}$ ***b)*** $\dfrac{x^2 + 4x + 16}{x + 4}$
c) $\dfrac{2x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 5x - 5}{2x^3 + 5x^2 + x - 3}$ ***d)*** $\dfrac{1}{x - 1}$

36 Efectúa, simplificando al máximo, las siguientes operaciones con fracciones algebraicas:

a) $\dfrac{7x}{x+1}-\dfrac{2x}{3x(x+1)}-\dfrac{7}{x+1}$

b) $\dfrac{x^2-9}{x+1}\cdot\dfrac{x^2-1}{x+3}$

c) $\dfrac{x^4-16}{3x-15}:\dfrac{4x^2+16}{x^2-9}$

d) $\left(\dfrac{x+1}{x-3}\right)^2$

e) $\dfrac{3x}{x-2}\left(\dfrac{x+1}{x-1}-\dfrac{2x+5}{x}\right)$

f) $\dfrac{x-2}{2x}+\dfrac{x-1}{x}+\dfrac{3x+3}{3x}$

g) $\dfrac{x^2-5}{x}-\dfrac{x+1}{x^2}$

h) $\dfrac{10}{3x^2+6x}-\dfrac{1}{4x^2+8x}$

i) $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{5x+1}{x-1}+\dfrac{2x}{x^2-1}$

j) $\dfrac{x-1}{x+3}+\dfrac{2x-5}{x-1}+\dfrac{4x}{x^2+2x-3}$

k) $2-\dfrac{5}{x^2+2x+1}-\dfrac{7x}{x+1}$

l) $\left(1-\dfrac{x+5}{x+2}\cdot\dfrac{x-3}{x+2}\right):\dfrac{4}{x+2}$

m) $\left(\dfrac{x+2}{x-2}-\dfrac{x-2}{x+2}\right)\cdot\left(x-\dfrac{4}{x}\right)$

n) $\dfrac{2x}{x-1/x}-\dfrac{2}{x^2+1}$

ñ) $\dfrac{6}{\dfrac{1}{1+(1/x)}-1}$

o) $\dfrac{x^2-8x+16}{x^2+5x+6}:\dfrac{x-4}{x+2}$

p) $\dfrac{x^2-49}{2x}\cdot\dfrac{3x^3}{x^2+2x-35}$

Solución: *a)* $\dfrac{21x^2-23x}{3x(x+1)}$ *b)* $(x-3)(x-1)$ *c)* $\dfrac{x^4-13x^2+36}{12x-60}$ *d)* $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-6x+9}$ *e)* $\dfrac{-3x^2-6x+15}{x-2}$ *f)* $\dfrac{5x-6}{2x}$ *g)* $\dfrac{x^3-6x-1}{x^2}$ *h)* $\dfrac{37}{12x^2+24x}$ *i)* $\dfrac{-5x^2-x-4}{x^2-1}$ *j)* $\dfrac{3x^2+3x-14}{x^2+2x-3}$ *k)* $\dfrac{-5x^2-3x-3}{x^2+2x+1}$ *l)* $\dfrac{2x+19}{4x+8}$ *m)* 8 *n)* $\dfrac{2x^3}{x^2-1}$ *ñ)* $-6(x+1)$ *o)* $\dfrac{x-4}{x+3}$ *p)* $\dfrac{3x^3-21x^2}{2x-10}$

37 Calcula a y b para que se cumpla que:

$$\frac{3x+2}{(x-1)(x+2)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}$$

Solución: $a=5/3$ y $b=4/3$

38 Calcula a, b y c, sabiendo que:

$$\frac{-2x^2-16x+2}{(x-1)(x+2)(x-5)}=\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}+\frac{c}{x-5}$$

Solución: $a=4/3$, $b=26/21$ y $c=-96/21$

39 Determina A, B y C:

$$\frac{3x^2+5}{4x^3+16x^2+21x+9}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{2x+3}+\frac{C}{(2x+3)^2}$$

Solución: $A=8$, $B=-29/2$ y $C=-47/2$

Ecuaciones polinómicas

40 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2-5x+4=0$ *b)* $x^2-3x-4=0$ *c)* $x^2-6x-16=0$ *d)* $x^2-16=0$ *e)* $2x^2+10x+8=0$ *f)* $x^2-x-6=0$

41 ¿Qué valor debe tener c en la ecuación $x^2-5x+c=0$ para que esta no tenga soluciones reales?

Solución: $c>25/4$

42 Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a) $x^4+3x^2-4=0$

b) $x^4-5x^2+4=0$

c) $x^4+5x^2+4=0$

d) $x^4-10x^2+9=0$

Solución: *a)* $x=\pm1$ *b)* $x=\pm1, x=\pm2$ *c)* No tiene soluciones reales. *d)* $x=\pm1, x=\pm3$

43 Halla las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $3x^3+12x^2+3x-18=0$

b) $x^3+x^2-16x+20=0$

c) $x^4-x^3-24x^2+4x+80=0$

d) $2x^3-24x+32=0$

e) $x^3+9x^2+15x+7=0$

f) $2x^3-5x^2-4x+3=0$

g) $6x^3+25x^2-24x+5=0$

Solución: *a)* $x=1, x=-2, x=-3$ *b)* $x=-5, x=2$ *c)* $x=2, x=-2, x=-4, x=5$ *d)* $x=2, x=-4$ *e)* $x=-7, x=-1$ *f)* $x=-1, x=3, x=1/2$ *g)* $x=-5, x=1/3, x=1/2$

Ecuaciones racionales

44 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2-\dfrac{64}{x^2}=-12$

b) $\dfrac{4}{x^2-1}+\dfrac{1}{x+1}=0$

c) $\dfrac{1}{x+3}+\dfrac{1}{x^2-9}=\dfrac{1}{x-3}$

d) $\dfrac{3x-3}{x-1}+\dfrac{x^2+2}{x+1}=\dfrac{7x+1}{x^2-1}$

Solución: *a)* $x=\pm2$ *b)* $x=-3$ *c)* No tiene solución *d)* $x=-3, x=2$

Ecuaciones con valor absoluto

45 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $|x^2 + 7x - 8| = 10$

b) $\left|\dfrac{x+1}{x-2}\right| = 6$

c) $|x^2 + 2| = 4$

Solución: *a)* $x_1 = -9, x_2 = 2, x_3 = \dfrac{-7+\sqrt{41}}{2}, x_4 = \dfrac{-7-\sqrt{41}}{2}$

b) $x_1 = \dfrac{13}{5}, x_2 = \dfrac{11}{7}$ *c)* $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}$

Ecuaciones irracionales

46 Resuelve estas ecuaciones:

a) $x = 1 + \sqrt{x^2 + 25}$

b) $\sqrt{2x+5} + 3 = 3x$

c) $\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{x+1}{2}$

d) $\sqrt{x+6} + \sqrt{x} = 6$

Solución: *a)* $x = 13$ *b)* $x = 2$

c) $x = 4$ y $x = -1$ *d)* $x = \dfrac{25}{4}$

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

47 Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $2^{-2x} = 10^{x+1}$

b) $3^{x+1} + 9^{x-1} = 162$

c) $\sqrt{2^x\sqrt{4^x\sqrt{8^x}}} = \sqrt[4]{2^{2x+7}}$

d) $3^{2x} = 12$

e) $3^{x+1} + 3^x + 3^{x-1} = 117$

f) $0{,}4 = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

g) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{4x-1} - 7\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x} + 3 = 0$

h) $2 \cdot 4^{x+1} + 2^{x+2} = \dfrac{3}{2}$

i) $3^{x+1} = 2 \cdot 5^{2x}$

Solución: *a)* $x = \dfrac{-1}{2\log 2 + 1}$ *b)* $x = 3$ *c)* $x = 2$

d) $x = \dfrac{\log 12}{2\log 3}$ *e)* $x = 3$ *f)* $x = \ln(2/3)$ *g)* $x = 1/2$

h) $x = -2$ *i)* $x = \dfrac{\ln 2 - \ln 3}{\ln 3 - 2\ln 5}$

48 Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $\log_8 4^{2x} = 4$

b) $\ln(x+2)\log e = 1$

c) $\log e^{\ln x} + \ln x^{\log e} = 1$

d) $x^{1+\log x} = 10x$

e) $\log_{x+1} 25 = 2$

f) $\log\sqrt{x+1} - \log\sqrt{x} = \log 1\,000$

g) $2x \cdot \ln x - 3x = 0$

Solución: *a)* $x = 3$ *b)* $x = 8$ *c)* $x = \sqrt{10}$ *d)* $x = 10$ *e)* $x = 4$

f) $x = \dfrac{1}{10^{12} - 1}$ *g)* $x = \sqrt{e^3}$

Inecuaciones

49 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $2 + x - x^2 > 0$

b) $\dfrac{(x+7)(x-5)}{x-2} \leq 0$

c) $\dfrac{x^3 + x}{x+1} < 0$

d) $x^3 + 1 \geq 0$

e) $-x^3 + 3x^2 + x - 3 < 0$

f) $x^2 - 6x + 8 > 0$

g) $x^3 - 3x^2 - x + 3 \leq 0$

Solución: *a)* $(-1, 2)$ *b)* $(-\infty, -7] \cup (2, 5]$ *c)* $(-1, 0)$

d) $[-1, +\infty)$ *e)* $(-1, 1) \cup (3, +\infty)$ *f)* $(+\infty, 2) \cup (4, +\infty)$

g) $(+\infty, -1] \cup [1, 3]$

50 Resuelve estas inecuaciones racionales:

a) $\dfrac{1-x}{x+2} \geq 0$

b) $\dfrac{x^2 - x - 6}{x+5} \leq 0$

c) $\dfrac{3x^2 + 5x - 2}{x^2 - 9} < 0$

Solución: *a)* $(-2, 1]$ *b)* $(-\infty, -5) \cup [-2, 3]$

c) $(-\infty, -3) \cup [-2, 1/3] \cup (3, +\infty)$

51 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $3x - 2y + 4 < 0$

b) $4x + y - 2 \geq 0$

c) $7x \leq 3y + 1$

d) $2x + 3y \geq 5$

Sistemas de ecuaciones

52 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, indicando si son incompatibles o compatibles y, en este caso, si son determinados o indeterminados:

a) $\begin{cases} 3x - 2y = -5 \\ x + y = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x \quad y = 5 \\ 4x - 2y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 3 = y \\ 2x = y - 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 1 + x = y \\ 2x - 2y = -2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 3y = 12 \\ \dfrac{x-y}{2} = \dfrac{2x}{3} - 2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \dfrac{2x}{3} - \dfrac{y+1}{2} = 1 \\ 4x - 7y = 5 \end{cases}$

g) $\begin{cases} -(x+3) + \dfrac{x+y}{4} - -1 \\ \dfrac{y-x}{2} + \dfrac{5y}{3} = x + \dfrac{12+5y}{3} \end{cases}$

h) $\begin{cases} 2x - 7y = -22 \\ x + y = 5/2 \end{cases}$

i) $\begin{cases} (3\backslash 2)(x+y) = 2 + 4y \\ 3(x+2) - 5y = 11 \end{cases}$

j) $\begin{cases} 2(x+2) = 24 - (3x+y) \\ 12 - 3(x+y) = 0 \end{cases}$

Solución: *a)* Compatible determinado: $x = 3, y = 7$ *b)* Incompatible

c) Compatible determinado: $x = 1, y = 4$

d) Compatible indeterminado: $x = y - 1$

e) Compatible determinado: $x = 4, y = 0$

f) Compatible determinado: $x = 3, y = 1$

g) Compatible indeterminado: $x = (-8 + y)/3$

h) Compatible determinado: $x = -1/2, y = 3$ *i)* Incompatible

j) Compatible indeterminado: $x = 12 - 3y$

53 Utilizando el método de Gauss, resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

a) $\begin{cases} 2x+3y-z=2 \\ x-y+z=5 \\ x+y-3z=-1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ -2x+3y-z=4 \\ -2x+2y+2z=8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x+3y-z=12 \\ x-y+2z=-4 \\ 3x+2y+z=8 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-3y+4z=3 \\ x-2y+z=0 \\ y-2z=-1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 5(x+y)-2z=-1 \\ 3x-2y=0 \\ -y+\dfrac{z}{2}=3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x+y-6z=2 \\ -x+y-1/4 \\ 2x+y-5z=0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x+2y-3z=-6 \\ 2(x-y)+3(y-z)=7 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x+y=\dfrac{5(x+1)}{6} \\ 2y-z=\dfrac{5x+y}{2} \\ x-6=z+1 \end{cases}$

Solución: ***a)*** $x=3, y=-1, z=1$ ***b)*** $x=-8/9, y=4/3, z=16/9$ ***c)*** Compatible indeterminado: $x=z, y=4+z$ ***d)*** $x=1, y=1, z=1$ ***e)*** $x=22/3, y=11, z=28$ ***f)*** $x=-7/8, y=-31/8, z=-9/8$ ***g)*** Incompatible ***h)*** $x=11/5, y=7/15, z=-24/5$

54 Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales:

a) $\begin{cases} xy+x^2+y^2=7 \\ xy=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log(x+1)-\log y=1 \\ x-2y=3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt{x^2+1}-y=2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x=1-\dfrac{\ln y}{\ln 3} \\ y=3^x-2 \end{cases}$

Solución: ***a)*** $x=1, y=2; x=-1, y=-2; x=2, y=1; x=-2, y=-1$ ***b)*** $x=4, y=1/2$ ***c)*** $x=0, y=-1$ ***d)*** $x=1, y=1$

Sistemas de inecuaciones

55 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x-1<\dfrac{-3-x}{4} \\ -(x+6)\geq 8x-1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{1+x}{3}\geq x+1 \\ 2(x-1)\geq 1+\dfrac{x}{2} \end{cases}$

Solución: ***a)*** $x\leq -5/9$ ***b)*** No tiene solución

56 Resuelve gráficamente los sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 3x+2y-7<0 \\ 2x-4y+3>0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x+3y-7\leq 0 \\ y<2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x>-1 \\ 3x-y<0 \\ x+y>6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x<5 \\ x+y-2>0 \\ 3x-\dfrac{5(y+1)}{2}<0 \end{cases}$

57 Resuelve estos sistemas de inecuaciones no lineales:

a) $\begin{cases} x^2-x-2\geq 0 \\ -2x^2+3x+9\geq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} -x^2+8x-12\geq 0 \\ x^2+4x+3<0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{2-x}\leq 0 \\ x^3-4x>0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x^2-4x+4\leq 0 \\ \dfrac{x^2+1}{x}>0 \end{cases}$

Solución: ***a)*** $[-3/2, -1]\cup[2, 3]$ ***b)*** $(1, 2]$ ***c)*** $(-2, -1]\cup(2, +\infty)$ ***d)*** $x=2$

58 Resuelve gráficamente estos sistemas no lineales:

a) $\begin{cases} y>x^2-x-2 \\ 3x+2y-3<0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y^2<x \\ x-y-3\geq 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y<-x^2+x+2 \\ x^2-2x+1<y \end{cases}$

d) $\begin{cases} y>1/x^2 \\ x^2+y^2<2 \end{cases}$

Problemas de aplicación

59 Un padre tiene el doble de edad que su hijo, al que dentro de 15 años sacará 25 años. ¿Qué edades tienen los dos en la actualidad?

Solución: 50 años y 25 años

60 Actualmente un padre tiene 30 años más que su hijo, y dentro de 10 años la edad del hijo será la cuarta parte de la suma de sus edades. ¿Qué edades tienen el padre y el hijo actualmente?

Solución: 35 años y 5 años

61 La suma de las dos cifras de un número es 12. Si a este número le restamos 54, el resultado es igual al obtenido al cambiar de orden las cifras del número inicial. ¿De qué número se trata?

Solución: 93

62 Halla un número de dos cifras sabiendo que las decenas son el cuádruple de las unidades y que si invertimos sus cifras y sumamos el número resultante con el anterior, obtenemos 55.

Solución: 41

63 Determina qué número se diferencia de su cuadrado en 30 unidades.

Solución: 6

64 Un bodeguero vende 54 L de vino de dos tipos: uno de 2 €/L y el otro de 4 €/L. El precio total de la venta es 174 €. ¿Cuántos litros ha vendido de cada vino?

Solución: 21 L del de 2 €/L y 33 L del de 4 €/L

65 Las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo son tres números consecutivos. Averigua las medidas de dicho triángulo.

Solución: 3, 4 y 5

66 Sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo se puede construir un cuadrado de 65 cm^2 de superficie. Uno de los catetos de dicho triángulo mide 3 cm más que el otro. Averigua el área del triángulo.

Solución: 14 cm^2

67 Calcula el área de un triángulo isósceles cuyo perímetro mide 32 cm y cuyo lado desigual es de 12 cm.

Solución: 48 cm^2

68 Un grifo tarda 3 h en llenar un depósito, mientras que otro solo necesita 2 h. ¿Cuánto tiempo emplearán los dos grifos en llenarlo si están funcionando a la vez?

Solución: 1,2 h = 1 h y 12 min

69 Dos grifos llenan un recipiente en 10 s. Si uno de ellos lo llena en 14 s, ¿en cuánto tiempo lo llena el otro?

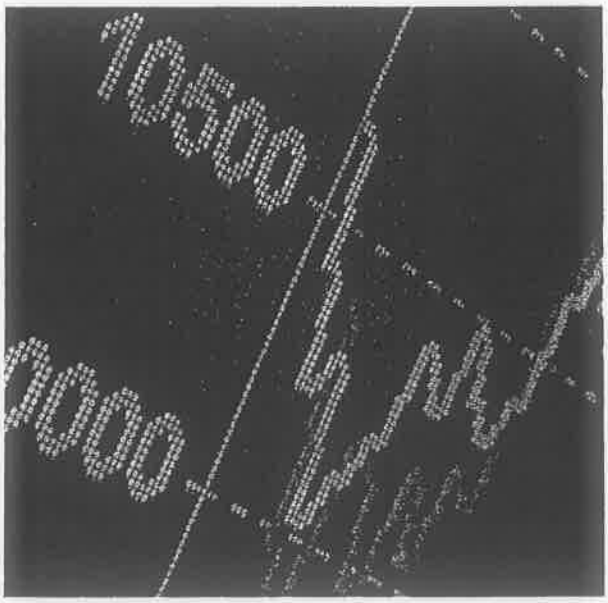
Solución: 35 s

70 Tres amigos invierten 10 000 €, 40 000 € y 50 000 €, respectivamente, para abrir un negocio. Tras finalizar el primer ejercicio económico y al repartir los beneficios, el segundo de los amigos obtiene 2 400 € más que el primero. ¿Cuáles son los beneficios del negocio?

Solución: 800 €, 3 200 € y 4 000 €

71 Los beneficios de una empresa se reparten entre tres socios: uno recibe la mitad, otro el 60 % de lo que queda y el tercero, 3 700 €. ¿A cuánto ascendían los beneficios? ¿Qué porcentaje de capital había puesto cada uno de ellos, si suponemos que los beneficios se reparten de forma proporcional al capital invertido?

Solución: 18 500 €; 50 %, 30 % y 20 %, respectivamente



72 Una hipoteca aumenta dos veces durante un año: la primera un 0,75 %, y la segunda, un 1,25 %. Calcula el importe de la mensualidad inicial si ha sufrido en total un incremento de 10 €.

Solución: 498 €

73 Un cierto capital al 1,25 % anual se coloca después de un año al 4 % anual y se obtiene en total un beneficio de 2 650 € cuando termina el segundo año. ¿Cuál ha sido el capital invertido?

Solución: 50 000 €

74 Una población de 10 000 habitantes sufre primero un descenso y después, gracias a la inmigración, llega a ser de 11 520 habitantes. Sabiendo que el porcentaje de aumento ha sido 5 veces mayor que el porcentaje de disminución, averigua qué porcentajes de disminución y aumento ha sufrido la población.

Solución: 4 % de disminución y 20 % de aumento

75 Con una lámina cuadrada de cartón de 121 cm^2 de superficie, se desea construir una caja sin tapa que tenga una capacidad de 75 cm^3, cortando cuatro cuadrados idénticos en cada esquina. Determina las dimensiones de los cuadrados que debemos recortar de la lámina original.

Solución: cuadrados de lado 3 cm o 0,878 cm

76 En el mercado, Pedro se ha gastado 11,6 € por la compra de patatas, manzanas y naranjas que costaban, respectivamente, 1 €/kg, 1,2 €/kg y 1,5 €/kg. ¿Cuántos kilos ha comprado de cada alimento si entre todos han pesado 9 kg y, además, se ha llevado 1 kg más de naranjas que de manzanas?

Solución: 2 kg de patatas, 3 kg de manzanas y 4 kg de naranjas

77 Una familia tiene unos ingresos al mes de 3 250 € por los sueldos de la madre, el padre y el hijo. Si la madre gana el doble que el hijo, y el padre 2/3 de lo que recibe la madre, ¿cuánto gana cada uno de los miembros de la familia?

Solución: el padre gana 1 000 €, la madre, 1 500 € y el hijo, 750 €

78 Calcula tres números sabiendo que el tercero es igual a dos veces el primero más el segundo; que el segundo es la cuarta parte del doble del primero más el tercero, y que si se resta al tercero la suma del primero más el segundo, el resultado da 3.

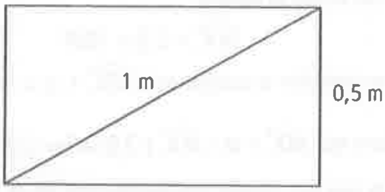
Solución: 3, −4 y 10

79 Determina los valores de a, b y c para que la parábola de ecuación $y = ax^2 + bx + c$ pase por los puntos (1, 0), (−1, 10) y (3, 14).

Solución: $a = 3$, $b = -5$ y $c = 2$

1 Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 15 cm y uno de sus catetos 9 cm, ¿cuáles son las razones trigonométricas de sus ángulos agudos?

2 En un rectángulo sabemos que la diagonal mide un metro y su lado menor 0,5 m como podemos ver en la figura. ¿Qué ángulo forma la diagonal con el lado mayor?



3 En un triángulo rectángulo, la hipotenusa mide $\sqrt{221}$ cm y uno de sus ángulos agudos $\hat{A}$ verifica que tg $\hat{A} = 1{,}1$; ¿cuál es la longitud de los dos catetos?

4 Si sen a = $\frac{\sqrt{3}}{2}$, calcula las siguientes razones trigonométricas:

a) sen (a + 30°) *c)* sen (a + 60°)

b) sen (a + 45°) *d)* sen (–a + 45°)

5 Indica cuál tiene mayor valor en cada una de las parejas indicadas a continuación:

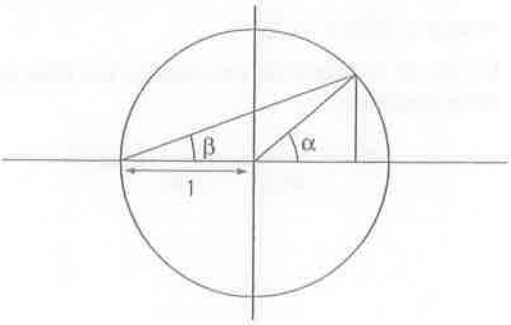
a) sen 55° y cos 55°

b) sen 438° y sec 10°

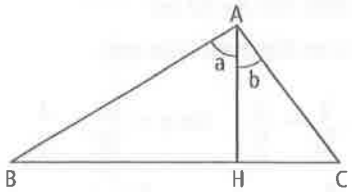
c) tg 15° y cotg 15°

d) sen 175° y cos 175°

6 ¿Qué relación existe entre las razones trigonométricas de los ángulos α y β señalados en la siguiente figura?



7 En un triángulo rectángulo sabemos que la altura correspondiente a la hipotenusa es media proporcional entre las partes en que ésta divide a la hipotenusa, es decir:



$$\frac{AH}{BH} = \frac{HC}{AH} \rightarrow (AH)^2 = BH \cdot HC$$

Demuestra este resultado utilizando el coseno de la suma de ángulos.

8 Calcula sen $\frac{a}{2}$ y cos $\frac{a}{2}$ sabiendo que tg a = 1,2 y *a* es un ángulo del tercer cuadrante.

9 Comprueba si son ciertas o falsas las identidades siguientes:

a) $\dfrac{\text{sen } 2a}{1 - \cos^2 a} = \dfrac{2}{\text{tg } a}$

b) $\sec \alpha - \sec \alpha \cdot \text{sen}^2 \alpha = \dfrac{1}{\sec \alpha}$

10 Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\cos^2 x - \text{sen}^2 x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ si $0° < x < 360°$

b) $\cos^2 x = \cos x$ si $0° < x < 360°$

c) $\cos 2x = \cos^2 x$ si $0° < x < 360°$

11 Resuelve la ecuación trigonométrica:

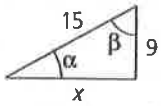
$$\text{sen } 2a = \cos a$$

12 Comprueba si es cierta o falsa la igualdad:

$$\frac{\cos^4 a - \text{sen}^4 a}{\text{sen } a \cdot \cos 2a} = \text{cosec } a$$

6C

1 Si dibujamos los datos



El otro cateto x es: $x = 12$ cm.

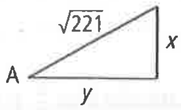
Y sus razones trigonométricas son:

$$\text{sen}\ \alpha = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} \qquad \cos \alpha = \frac{12}{15} = \frac{4}{5} \qquad \text{tg}\ \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\text{sen}\ \beta = \frac{4}{5} \qquad \cos \beta = \frac{3}{5} \qquad \text{tg}\ \beta = \frac{4}{3}$$

2 Forma un ángulo de 30°.

3 Tenemos los siguientes datos con los que podemos plantear el sistema:



$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{y} = 1{,}1 \\ x^2 + y^2 = (\sqrt{221})^2 \end{array}\right\}$$ Resolviendo el sistema obtenemos que $y = 10$ cm y $x = 11$ cm.

4 Si $\text{sen a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, se tiene que $\cos a = \dfrac{1}{2}$, por lo tanto:

a) $\text{sen}(a + 30^\circ) = \text{sen a} \cos 30^\circ + \cos a\ \text{sen}\ 30^\circ =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

b) $\text{sen}(a + 45^\circ) = \text{sen a} \cos 45^\circ + \cos a\ \text{sen}\ 45^\circ =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

c) $\text{sen}(a + 60^\circ) = \text{sen a} \cos 60^\circ + \cos a\ \text{sen}\ 60^\circ =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

d) $\text{sen}(-a + 45^\circ) = \text{sen}(-a) \cos 45^\circ + \cos(-a)\ \text{sen}\ 45^\circ =$

$$= \frac{-\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

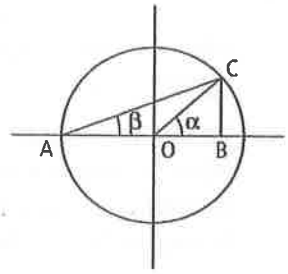
5 a) sen 55° > cos 55° ya que sen x > cos x si 45° < x < 90°

b) sec 10° > sen 438°, ya que sec 10° >1.

c) tg 15° < cotg 15° ya que tg x < cotg x si 0° < x < 45°.

d) sen 175° < cos 175

6 Señalando los puntos donde las rectas cortan a la circunferencia en la figura, tenemos:



En el triángulo AOC del que β es uno de los ángulos, vemos que los lados contiguos al ángulo que es suplementario con α son radios de la circunferencia, por tanto, es un triángulo isósceles, y se cumple que el ángulo $\widehat{OCA}$ y β son iguales, con lo que se verifica:

$$\widehat{AOC} + 2\beta = 180^\circ$$

Como también se cumple que: $\widehat{AOC} + \alpha = 180^\circ$

Se tiene que: $\widehat{AOC} + \alpha = \widehat{AOC} + 2\beta \Rightarrow \alpha = 2\beta \Rightarrow \beta = \dfrac{\alpha}{2}$

Por lo que las razones trigonométricas de β son las razones de $\dfrac{\alpha}{2}$.

7 Como a + b = 90°, y los triángulos BHA y CHA son triángulos semejantes, tenemos el siguiente resultado:

$$\text{sen a} = \frac{BH}{AB} \qquad \cos a = \frac{AH}{AB}$$

$$\text{sen b} = \frac{HC}{AC} \qquad \cos b = \frac{AH}{AC}$$

sustituyendo estas expresiones en el desarrollo de cos (a + b), obtenemos:

$$\cos(a + b) = \frac{AH}{AB} \cdot \frac{AH}{AC} - \frac{BH}{AB} \cdot \frac{HC}{AC} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AH \cdot AH}{AB \cdot AC} = \frac{BH \cdot HC}{AB \cdot AC} \Rightarrow (AH)^2 = BH \cdot HC$$

8 Las expresiones de sen $\dfrac{a}{2}$ y cos $\dfrac{a}{2}$ en función de las razones del ángulo a son:

$$\text{sen}\ \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}} \qquad \cos \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}$$

$1 + \text{tg}^2 a = \sec^2 a \Rightarrow + (1{,}2)^2 = 1 + 1{,}44 = 2{,}44 = \sec^2 a \Rightarrow$
$\Rightarrow \sec a = \sqrt{2{,}44} = -1{,}56$

El signo de la secante de a es negativo por estar a en el tercer cuadrante.

$$\cos a = \frac{1}{\sec a} = \frac{1}{-1{,}56} = -0{,}64$$

Unidad 6 **Razones trigonométricas**

1 Si $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ y $90° < \alpha < 360°$, calcula las restantes razones trigonométricas de α.

2 Halla las razones trigonométricas de:

a) $2\,655°$ *b)* $\frac{13\pi}{3}$ *c)* $-690°$ *d)* $\frac{\pi}{12}$

3 Simplifica la siguiente expresión:

$$(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{cotg}\alpha)\cdot\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) + \right.$$

$$\left. + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)\cdot \operatorname{sen} 2\alpha$$

4 Si $2\pi \le \beta \le \frac{5\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = 4$, $\operatorname{tg}\beta = 5$ y α es un ángulo del tercer cuadrante, halla:

a) $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$ *b)* $\cos 2\alpha$ *c)* $\sec(\alpha/2)$

5 Sin utilizar calculadora, indica cuánto valen las siguientes expresiones:

a) $\operatorname{sen} 15° \cos 105° + \operatorname{sen} 105° \cos 15°$

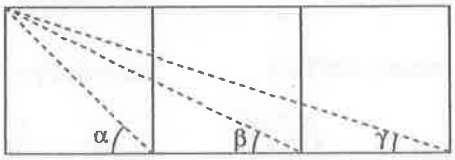
b) $\dfrac{\operatorname{sen} 157° 30'}{\cos 22° 30'} - \dfrac{\cos 157° 30'}{\operatorname{sen} 22° 30'}$

6 Halla el valor de x en las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{2}\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x = 1$

b) $\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} + \cos x = 1$

7 ¿Qué relación existe entre los ángulos α, β y γ de la figura, teniendo en cuenta que los tres cuadrados son iguales?



6E

1 $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{-2\sqrt{2}}{3}$ $\quad \text{tg}\,\alpha = -2\sqrt{2}$

$\text{cosec}\,\alpha = \dfrac{-3\sqrt{2}}{4}$ $\quad \sec\alpha = 3$ $\quad \text{cotg}\,\alpha = \dfrac{-\sqrt{2}}{4}$

2 a) $\text{sen}\,2\,655^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \cos 2\,655^\circ = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \text{tg}\,2\,655^\circ = -1$

$\text{cosec}\,2\,655^\circ = \sqrt{2}$ $\quad \sec 2\,655^\circ = -\sqrt{2}$ $\quad \text{cotg}\,2\,655^\circ = -1$

b) $\text{sen}\,\dfrac{13\pi}{5} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \cos\dfrac{13\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \text{tg}\,\dfrac{13\pi}{4} = 1$

$\text{cosec}\,\dfrac{13\pi}{4} = -\sqrt{2}$ $\quad \sec\dfrac{13\pi}{4} = -\sqrt{2}$ $\quad \text{cotg}\,\dfrac{13\pi}{4} = 1$

c) $\text{sen}\,(-690^\circ) = \dfrac{1}{2}$ $\quad \cos(-690^\circ) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \text{tg}\,(-690^\circ) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\text{cosec}\,(-690^\circ) = 2$ $\quad \sec(-690^\circ) = \dfrac{2\sqrt{3}}{2}$ $\quad \text{cotg}\,(-690^\circ) = \sqrt{3}$

d) $\text{sen}\,\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ $\quad \cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ $\quad \text{tg}\,\dfrac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$

$\text{cosec}\,\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot(4+2\sqrt{3})$

$\sec\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{2}{2+\sqrt{3}} = \sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot(4-2\sqrt{3})$

$\text{cotg}\,\dfrac{\pi}{12} = 2+\sqrt{3}$

3 $(\text{tg}\,\alpha - \cot\alpha)\cdot\left[\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)+\text{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\right]\cdot \text{sen}\,2\alpha = -4$

4 a) $\text{sen}\,(\alpha-\beta) = -0{,}04756$ $\quad$ b) $\cos 2\alpha = -0{,}882353$ $\quad$ c) $\sec\dfrac{\alpha}{4} = -1{,}6249$

5 a) $\text{sen}\,15^\circ\cos 105^\circ + \text{sen}\,105^\circ\cos 150^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

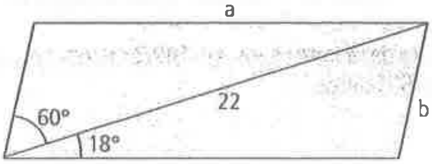
b) $\dfrac{\text{sen}\,157^\circ\,30'}{\cos 22^\circ\,30'} - \dfrac{\cos 157^\circ\,30'}{\text{sen}\,22^\circ\,30'} = -2\sqrt{2}$

6 a) $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ $\quad$ b) $x = 2k\pi$

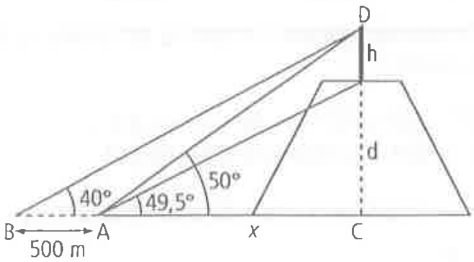
7 $\alpha = \beta + \gamma$

1 Un grupo de salvamento trata de localizar el foco de emisión de una petición de socorro. Para ello sitúa dos receptores montados en dos coches situados en los puntos A y B que distan entre sí 4 kilómetros. En un determinado momento localizan el foco emisor, y la señal forma en A con la línea de A a B un ángulo de 35°, y en B con la línea de B a A un ángulo de 72°. ¿A qué distancia se encuentra el foco emisor de los coches de salvamento?

2 Calcula el área, las longitudes de los lados y de la otra diagonal, del paralelogramo siguiente:



3 Una torre de vigilancia contra el fuego se encuentra en el pico de un monte. Desde un punto A vemos la base y el extremo superior de la torre con unos ángulos de 49,5° y 50° respectivamente con la horizontal. Si retrocedemos 500 m vemos el extremo de la torre bajo un ángulo de 40°. Calcula la altura de la torre.



4 Desde la azotea de un edificio vemos el punto más alto de la torre de la Catedral con un ángulo de 30° con la horizontal. Si nos acercamos 40 m en dirección de la catedral y llegamos al extremo de la azotea, se ve el extremo de la torre con un ángulo de 45°, y el pie de la torre se ve bajo un ángulo de 60° con la horizontal de la visual. Encuentra la altura de la torre y la altura del edificio.

5 Desde un paseo marítimo se ven una boya y una roca en el mar; observamos las dos cosas en dos puntos del paseo, A y B. Desde el punto A las visuales con la boya y la roca forman un ángulo de 65°, y las visuales con la boya y el punto B forman un ángulo de 30°.

Desde el punto B, las visuales con la roca y la boya forman un ángulo de 60°, mientras que el ángulo que forman las visuales a la roca y al punto A es de 30°. Sabiendo que la distancia entre los puntos A y B es de 200 metros, encuentra la distancia entre la roca y la boya.

6 En un rectángulo ABCD de lados 8 y 12 centímetros respectivamente, se traza desde B una perpendicular a la diagonal $\overline{AC}$ que corta al lado $\overline{CD}$ en el punto P. Halla la longitud del segmento $\overline{BP}$.

7C

1 Vamos aplicar el teorema de los senos:

$$\frac{4}{\text{sen } 73^\circ} = \frac{b}{\text{sen } 72^\circ} \Rightarrow b = \frac{4 \text{ sen } 72^\circ}{\text{sen } 73^\circ} = 3{,}96 \text{ km}$$

$$\frac{4}{\text{sen } 73^\circ} = \frac{a}{\text{sen } 35^\circ} \Rightarrow a = \frac{4 \text{ sen } 35^\circ}{\text{sen } 73^\circ} = 2{,}37 \text{ km}$$

2 Aplicando el teorema de los senos en el triángulo que forman la diagonal y los lados que están por encima de ella se tiene:

$$\frac{22}{\text{sen } 102^\circ} = \frac{a}{\text{sen } 60^\circ} \Rightarrow a = \frac{22 \cdot \text{sen } 60^\circ}{\text{sen } 102^\circ} = 19{,}57 \text{ cm}$$

De la misma forma, para el lado b se obtiene:

$$b = \frac{22 \cdot \text{sen } 18^\circ}{\text{sen } 102^\circ} = 6{,}97 \text{ cm}$$

El área es: $A = a \cdot h = a \cdot b \cdot \cos(102 - 90) =$
$= 19{,}57 \cdot 6{,}97 \cdot 0{,}98 = 133{,}66 \text{ cm}^2$

Si aplicamos ahora el teorema del coseno, podemos obtener la longitud de la otra diagonal:

$d^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos 78^\circ = 382{,}98 + 48{,}58 - 92{,}41 =$
$= 430{,}78 \Rightarrow d = 20{,}75 \text{ cm}$

3 Llamamos $y = h + d$ y trabajamos con los triángulos ADC y BDC para formar el sistema siguiente:

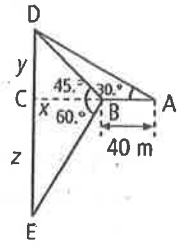
$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 50^\circ = \dfrac{y}{x} \\ \text{tg } 40^\circ = \dfrac{y}{x + 500} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow x \text{tg } 50^\circ = (x + 500) \text{ tg } 40^\circ \Rightarrow \\ \Rightarrow 1{,}19x = 0{,}84x + 420 \Rightarrow x = 1\,200 \text{ m} \end{array}$$

Despejando y en la primera ecuación:
$y = x \cdot \text{tg } 50^\circ = 1\,200 \cdot 1{,}19 = 1\,428 \text{ m}$

Tomando ahora el triángulo BDC:
$\text{tg } 49{,}5^\circ = \dfrac{d}{x} \Rightarrow d = 1\,200 \cdot \text{tg } 49{,}5^\circ = 1\,404 \text{ m}$

Por tanto, la altura de la torre es:
$h = y - d = 1\,428 - 1\,404 = 24 \text{ m}$

4 Trabajando con los triángulos ACD y BCD formamos el sistema:



$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 30^\circ = \dfrac{y}{x + 40} \\ \text{tg } 45^\circ = \dfrac{y}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}(40 + x) = x \Rightarrow x = 54{,}65 \text{ m}$$

Despejamos y en la segunda ecuación:

$$y = x \cdot \text{tg } 45^\circ \Rightarrow y = 54{,}65 \text{ m}$$

Trabajando son el triángulo BCE se tiene:

$$\text{tg } 60^\circ = \frac{z}{x} \Rightarrow z = x \cdot \text{tg } 60^\circ = 94{,}65 \text{ m}$$

La altura de la torre es $y + x = 149{,}3$ metros y la del edificio, 94,65 metros.

5 En el triángulo DBA calculamos $\overline{AD}$ por el teorema de los senos:

$$\frac{\overline{AD}}{\text{sen } 30^\circ} = \frac{200}{\text{sen } 55^\circ} \Rightarrow \overline{AD} = \frac{200 \cdot \text{sen } 30^\circ}{\text{sen } 55^\circ} = 122 \text{ m}$$

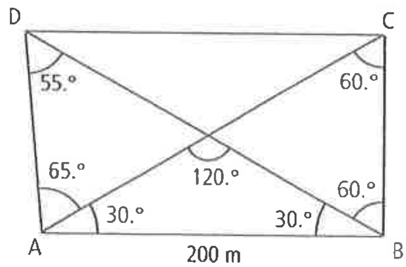
Calculamos ahora $\overline{AC}$ en el triángulo CBA:

$$\frac{\overline{AC}}{\text{sen } 90^\circ} = \frac{200}{\text{sen } 60^\circ} \Rightarrow \overline{AC} = \frac{200 \cdot \text{sen } 90^\circ}{\text{sen } 60^\circ} = 230 \text{ m}$$

Finalmente aplicamos el teorema del coseno en el triángulo ADC:

$\overline{DC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{AC}^2 - 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{AC} \cdot \cos 65^\circ =$
$= 14\,884 + 52\,900 - 23\,570 = 44\,214$

$\overline{DC} = 210{,}27$ m, que es la distancia entre la boya y la roca.



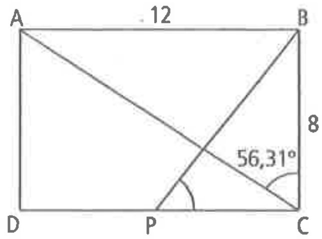
7C

6 En primer lugar hallamos el ángulo $\widehat{ACB}$:

$\text{tg}\,\widehat{ACB} = \frac{12}{8} = 1{,}5 \Rightarrow \widehat{ACB} = 56{,}31°$

En el triángulo de vértices BPC, $\widehat{BPC} = \widehat{ACB}$, por tanto:

$\text{sen}\,56{,}31° = \frac{8}{\overline{BP}} \Rightarrow \overline{BP} = 8 \cdot 0{,}83 = 6{,}64$ cm



Unidad 7 Resolución de triángulos

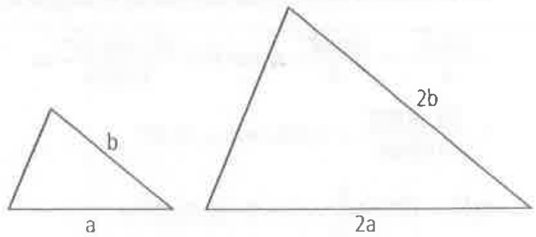
1 Desde el pie de la Torre de Pisa hasta su extremo superior hay 56 metros de pared. Si desde este extremo superior lanzamos una piedra verticalmente, al caer al suelo, esta dista del pie de la torre 4,419 metros. ¿Qué ángulo de inclinación tiene la torre?

2 En cierta ciudad, entre su catedral y el Ayuntamiento discurre un río. Desde un puente que dista 200 metros de la catedral y 300 del Ayuntamiento observamos que el ángulo que forman las visuales a ambos edificios es de 50°. ¿Qué distancia los separa?

3 La base de un triángulo isósceles mide 6 centímetros y uno de sus lados iguales mide 12. ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia que circunscribe a dicho triángulo?

4 ¿Cuántas soluciones puede tener un triángulo del que conocemos dos lados y el ángulo opuesto a uno de dichos lados? Resuelve el triángulo $\hat{B} = 30°$, $c = 5\sqrt{2}$ centímetros y $b = 5$ centímetros e interpreta el resultado.

5 ¿Qué relación existe entre las áreas de los dos triángulos siguientes?



6 Si la base de un triángulo aumenta el 10 % y la altura sobre ese lado disminuye un 10 %, ¿qué relación existe entre el área del triángulo inicial y la del nuevo triángulo obtenido?

7 Un globo aerostático esta atado con una cuerda a lo alto de un monte. Desde un punto A, vemos la cima del monte con un ángulo de 30°. Si avanzamos un kilómetro, la cima del monte se ve con un ángulo de 50° y la caja del globo con un ángulo de 52°. Encuentra la altura del monte y la longitud de la cuerda que ata al globo.

8 Un árbol está en la orilla de un río. En la orilla opuesta un observador ve la copa del árbol bajo un ángulo de 20°. Si retrocede 20 metros, ve la copa del árbol con un ángulo de 15°. Halla la altura del árbol y la anchura del río.

9 Para medir la profundidad de un valle situado entre dos montañas, nos colocamos en un punto A que es el punto más alto sobre el valle, desde el que observamos otro punto B situado en la montaña de enfrente, de forma que la visual desde A hasta B forma un ángulo de 15° con la horizontal. Desde este punto B observamos el punto más profundo del valle (punto C), de forma que la visual de B a C forma un ángulo de 42° con la horizontal.

Si la distancia de A hasta B es de 200 metros y desde B hasta C es de 50 metros, ¿qué profundidad tiene dicho valle?

7E

1 Aplicando la definición $\cos \alpha = \dfrac{4{,}419}{56} = 0{,}0789$

El ángulo de inclinación es de 85° 28′ 26″.

2 Aplicando el teorema del coseno:

$x = \sqrt{200^2 + 300^2 - 2 \cdot 200 \cdot 300 \cdot \cos 50°} = 230$

La distancia de la catedral al Ayuntamiento es, aproximadamente, de 230 metros.

3 Radio: 6,19 centímetros.

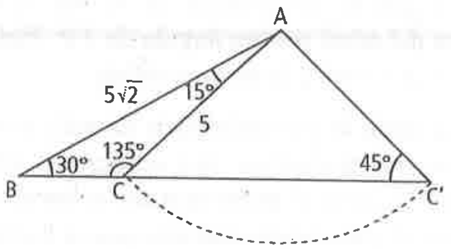
4 Puede tener 0, 1 o 2 soluciones.

En nuestro caso:

Triángulo ABC: $\hat{C} = 45°$ $\hat{A} = 105°$ $a = 9{,}66$ centímetros

Triángulo ABC′: $\hat{C} = 135°$ $\hat{A} = 15°$ $a = 2{,}59$ centímetros

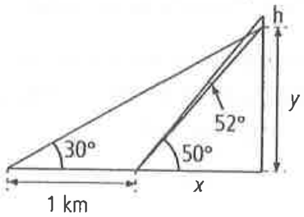
Pues existen las dos posibilidades indicadas en la gráfica:



5 Si llamamos S_1 al área del triángulo pequeño y S_2 al área del triángulo grande, se cumple que: $S_2 = 4S_1$.

6 El área disminuye un 1%.

7 La situación del globo es la que aparece en el dibujo:



$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 50° = \dfrac{y}{x} = 1{,}19 \\[2ex] \text{tg } 30° = \dfrac{y}{x+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \simeq 0{,}58 \end{array}\right\} 1{,}19\,x = 0{,}58x + 0{,}58$$

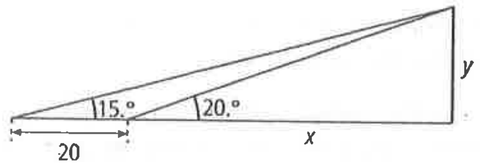
$x = 0{,}95$ km
$y = 1{,}13$ km, que es la altura del monte.

$\text{tg } 52° = \dfrac{y+h}{x} = 1{,}28 \Rightarrow h = 1{,}28 \cdot 0{,}95 - 1{,}13 = 0{,}086$ km

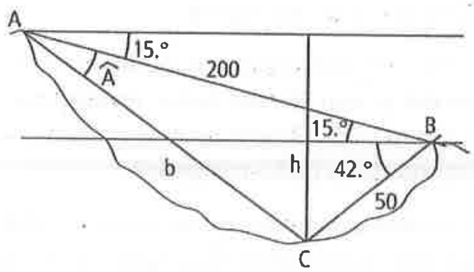
Así pues, la altura del monte es de 1 130 metros y el globo está situado a 86 metros sobre el monte.

8 Fijándonos en el dibujo, establecemos el sistema siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } 20° = \dfrac{y}{x} = 0{,}36 \\[2ex] \text{tg } 15° = \dfrac{y}{x+20} = 0{,}27 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 60\text{m},\ y = 21{,}6\text{m}$$



9 Hacemos el dibujo para poder plantear el problema.



Sabiendo dos lados del triángulo y el ángulo que forman, vamos a calcular el tercer lado:

$b^2 = 200^2 + 50^2 - 2 \cdot 200 \cdot 50 \cdot \cos 57° = 31\,700$

$b = 178{,}04$ m

Por el teorema de los senos calculamos el ángulo Â.

$\dfrac{\text{sen } \hat{A}}{a} = \dfrac{\text{sen } 57°}{b} \Rightarrow \text{sen } \hat{A} = \dfrac{50 \cdot \text{sen } 57°}{178{,}04} =$

$= \dfrac{50 \cdot 0{,}837}{178{,}04} = 0{,}235 \Rightarrow \hat{A} = 13{,}59°$

$\text{tg}(\hat{A} + 15°) = \dfrac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \text{tg } 28{,}59° =$

$= 178{,}04 \cdot 0{,}545 = 97{,}032$ m

Por lo tanto, la profundidad del valle es de 97,032 metros.